■　12 月の夜長に未解決問題をつつく　■

こうして毎週、原稿を書いているものだから、知らない人の中には、国語を私の専門だと思っている人もいるようだが、実は数学である。もちろん数学という学問に魅せられたから、それを伝えることのできる数学の教員となったわけだが、教育委員会勤めも長く、授業をしなくなって 15 年以上、学問はかなり遠くになりにけり、である。

そんな生活でも、時折、研究魂が目覚めるときがある。先日の新聞で、「コラッツ予想」に日本のベンチャー企業が 1 億 2000 万円の懸賞金をかけた、との報道があった。「コラッツ予想」とは、「どんな整数も、偶数なら 2 で割り、奇数なら 3 倍して 1 を足す。この操作を繰り返せば、必ず 1 に到達するだろう」というものだ。ドイツの数学者ローター・コラッツが世に出したが、80 年以上経っても未解決のままである。

懸賞にそそられ、興味本位で、表計算ソフトで実験してみた。例えば、5→16→8→4→2→1 のように、数が小さいうちはしばらくで 1 に到達するのだが、27 で突如 111 ステップに跳ね上がった。まだ様子見の段階だが、病む難問の臭いがプンプンする。

数年前、「双子素数は無限に存在するだろう」という予想に挑んだ、いや、つついたことがある。素数とは、1 より大きい整数で、約数が 1 とその数自身のみであるものをいう。小さい方から 2,3,5,7,11,…。双子素数は、例えば、3 と 5 のように、連続する 2 つの奇数がともに素数の組のこと。いろいろと試してみたが、どうも簡単にはいかない。

素数の魅力は、出現の規則性が読めないところにある。素数が無限にあることは、紀元前にユークリッドによって証明されている(※1)のだが、連続する整数の列には、素数がしばしば現れるところとしばらくは現れないところ(素数砂漠)がある。いつどんなタイミングで素数が出現するのかを、数学者は現在も追い求め続けている。

では、素数砂漠にはどれだけ長いものがあるか？　結論を言えば、無限の長さの素数砂漠が存在する(※2)。ここまで読んで、「何か変？」と思った人はセンスのある人。素数は無限にあるが、素数が無限に現れない整数列が存在するとは。これを説明できる人はもっとセンスのある人。夜長に、不思議な事実について考えふけってみるのもちょっと楽しい。

(※1)　素数が有限個と仮定し、それを $p_1, p_2, \cdots, p_n$ とおく。ここで、$p=p_1p_2\cdots p_n+1$ という数を考えると、p はどの素数 p_i でも割り切れない。従って、p 自身が新たな素数か、p は、$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 以外の新たな素数で割り切れることになり、仮定に矛盾。

(※2)　$n!=n(n-1)(n-2)\cdots 3\times 2\times 1$ は 2, 3,…, n の全てで割り切れる。ここで、連続する整数の列 $n!+2, n!+3, \cdots, n!+(n-2)$, $n!+(n-1)$, $n!+n$ はそれぞれ 2, 3,…, n で割り切れるので、長さ $n-1$ 個の素数砂漠である。$n\to\infty$ とすると、その長さは無限になる。