ペットボトル振動子の多角的解析

石川県立金沢泉丘高等学校理数科

小林 愛唯果　田中 立誠　林 叡志　松本 悠汰　森 総一郎

要旨

ペットボトルの口に管を装着し、水を入れ、口を下にするとペットボトルからの水の流出と空気の流入が繰り返される。このような装置をペットボトル振動子と呼ぶ。ペットボトル振動子は、振動する物体を解析するための簡易モデルとして使用されている。また、ペットボトル振動子 2 つの底面を管でつなぎ、1 つのときと同様に振動させると、互いのリズムがそろっていく様子が観測される。これを、ペットボトル振動子の同期現象と呼ぶ。本論文では、この同期現象に着目し、その周期を解析することにより、周期的な運動を繰り返す物体の振る舞いを数式で記述することを目標としている。我々は、振動数と位相の同期について数理モデル化に成功した。

１．研究背景・目的

同種の性質を持った要素の集団が相互作用して全体としての秩序が現れる現象を同期現象と呼び、日常的に様々な場面でこのような現象が見られる。蛍の発光や心臓細胞の律動に同期現象が見られるが、このような生物的、化学的な現象における同期現象は個々の物体が複雑な作用を及ぼしあっており、解析が難しい。そこで、これらの現象の解明に向け、簡単に実験が行え、比較的わかりやすい物理現象による解析を行うことが重要であると考え、ペットボトル振動子の同期現象と、振動の位相差が 180 度となる現象(逆相)に着目した。ペットボトル振動子の空気の流入には周期性があり、周期的なリズム運動の研究対象の一つで、主に日本国内で研究が進んでいる。本校物理部の先行研究[1]ではペットボトルを一つ使うと、空気の流入周期が長くなることを発見し、高い精度でペットボトル振動子の力の変化を測定する方法を確立した。また、先行研究では空気の体積と内圧を調べるための実測[2]がある。ペットボトル振動子の数理モデル化の先行研究には、水が流れているか、流れていないかによる数理モデルの作成[3]、水の流速と空気の内圧をパラメータにして数理モデルの作成[4]、管の内径と長さの変化による数理モデルの作成[5]などがる。２つのペットボトルを用いた同期現象の数理モデル化はペットボトル振動子の位相記述に着目し、蔵本モデル[6]を元に行った。

２．実験方法

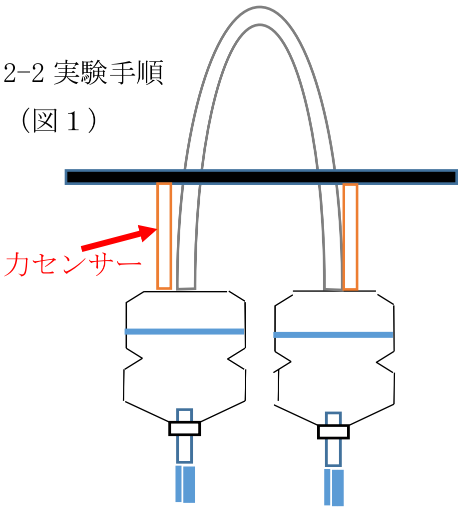
2-1 実験器具

- ２Ｌペットボトル　２本
- iPad
- 水槽　45×29×30(cm)
- 力センサー
- データロガー
- チューブ

内径 9 ㎜ 外径 11 ㎜ 長さ 10cm

ペットボトルの底面に取り付けたチューブの長さは実験に影響はないと考えた。また注ぎ口に取り付けたチューブの長さと内径は実験に影響は出るが今回は考えないようにした。

2-2 実験手順
（図１）



1.　図１のように､ペットボトルと力センサーを取り付ける。

2.　　データを 0.05 秒ごとに 120 秒間測定した。

3.　　前のデータと比べて 1.0N 以上変化があった時間をデータ解析によって取り出した。

４．実験結果

図２のグラフでは力が大きく変動している時刻で空気が流入し、それ以外の時刻では水が流出していた。

２つのペットボトルは空気の流入を繰り返すリズム運動をし、その周期が同期した。また、図３のようにその周期は、時間経過に伴い長くなった。

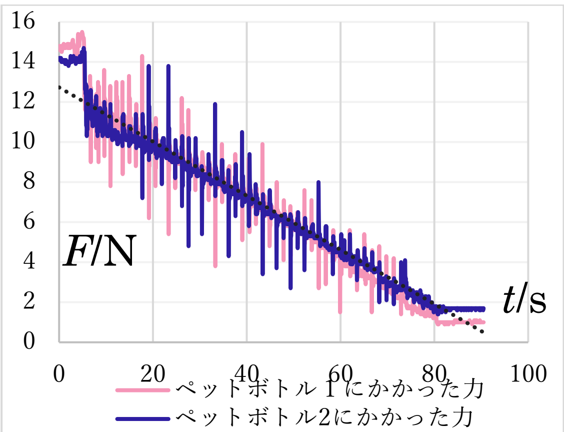


図2　横軸:経過時間

縦軸:ペットボトルにかかった力の大きさ

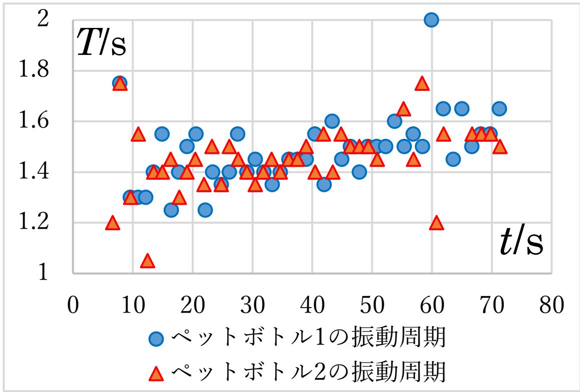


図３　横軸：経過時間　縦軸：振動周期

５．考察

○　先行研究[5]（蔵本 1984）より、同期現象における振動物体の振動数を表した数理モデルである蔵本モデルが示されている。

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N} \mathrm{h}(\varphi_i - \varphi_j) \quad [i = 1,\ 2 \ldots, N]$$

φ は位相　t は経過時間,

ωは固有振動数　i は対象の要素

N は要素の個数　　　K は結合定数

h は 2πの周期関数（蔵本　1984 では $\mathrm{h}(\varphi)$=-sin(φ)としている）

蔵本モデルは、単振動をする物体を対象としており、それぞれの物体の位相に応じて、相互作用を及ぼし、振動数が変化することを表している。本論文では、蔵本モデルをペットボトル振動子の場合に適応させた。このとき、ペットボトル振動子の水の重心の位置ベクトルを考えている。そこで、蔵本モデルにおける右辺のω_iは今回の実験においては一定でないため省略する。また、ペットボトル振動子の運動は単振動ではなくリミットサイクル振動である（小平　2006）ため、左辺の$\frac{d\varphi_i}{dt}$は、振動数ではなく、振動数の変化としてとらえている。

ペットボトル振動子は振動中心が変化し続け、周期が長くなるリミットサイクル振動をし、次式が成り立つと考えた。（[2]を参考に作

成）

$\frac{d\varphi_1}{dt} = -\frac{K}{2}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$　–①

$\frac{d\varphi_2}{dt} = -\frac{K}{2}\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$　–②

Cは積分定数,Kは結合定数,φは振動子の位相,tは経過時間　添え字はペットボトルを区別

$K > 0$のとき
$0 < \varphi_1 - \varphi_2 < \pi$のとき
　$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) > 0$より、

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = -\frac{K}{2}\sin(\varphi_1 - \varphi_2) < 0$$

すなわち、ペットボトル 1 の振動数は小さくなる。
このとき、$-\pi < \varphi_2 - \varphi_1 < 0$であるから、
　$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) < 0$より、

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = -\frac{K}{2}\sin(\varphi_2 - \varphi_1) > 0$$

すなわち、ペットボトル 2 の振動数は大きくなる。
位相が大きいペットボトルの振動数は小さくなり、位相が小さいペットボトルの振動数は大きくなる。
つまり、それぞれのペットボトルの振動数は、位相がそろうように変化する。
位相差が 0 となったとき、$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$となるから、振動数の変化がとまる。

$K < 0$のとき
$0 < \varphi_1 - \varphi_2 < \pi$のとき
　$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) < 0$より、

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = -\frac{K}{2}\sin(\varphi_1 - \varphi_2) > 0$$

すなわち、ペットボトル 1 の振動数は大きくなる。
このとき、$-\pi < \varphi_2 - \varphi_1 < 0$であるから、
　$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) > 0$より、

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = -\frac{K}{2}\sin(\varphi_2 - \varphi_1) < 0$$

すなわち、ペットボトル 2 の振動数は小さくなる。
位相が大きいペットボトルの振動数は大きくなり、位相が小さいペットボトルの振動数は小さくなる。
つまり、それぞれのペットボトルの振動数は、位相がπずれるように変化する。
位相差がπとなったとき、$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$となるから、振動数の変化がとまる。

加法定理により、①、②の左辺をそれぞれ展開すると、
①　より、

$\frac{d\varphi_1}{dt} = -\frac{K}{2}(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)$ –①’

$\frac{d\varphi_2}{dt} = -\frac{K}{2}(\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)$ –②’

よって①’②’ともに一階微分方程式であるから、辺々引くことができる。
①’－②’より、

$$\frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt} = -K(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)$$

$$\frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt} = -K\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} = -Kdt$$

両辺を積分し、

$$\log\left|\tan\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right| = -Kt + C$$

$$\tan\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = e^{-Kt+C}$$

$$\therefore \varphi_1 - \varphi_2 = 2\arctan(\mathrm{e}^{-Kt+C})$$

左辺$\varphi_1 - \varphi_2$は 2 つのペットボトル振動子の位相差をあらわしている。
ここで、$\mathrm{K} > 0$のとき　$\lim_{t\to\infty}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$

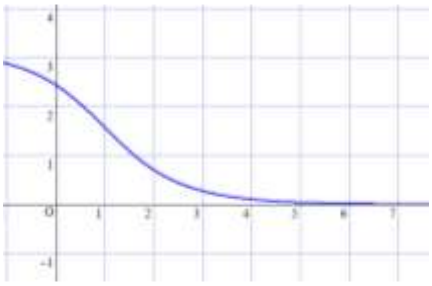


図４　横軸：経過時間　縦軸：ペット

$K < 0$のとき　$\lim_{t\to\infty}(\varphi_1 - \varphi_2) = \pi$

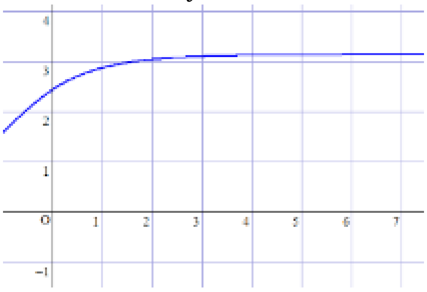


図５　横軸：経過時間　縦軸：ペット

したがって、$K > 0$のとき位相差が 0　すなわち同期をあらわし、$K < 0$のとき位相差がπすなわち逆相の同期をあらわす。

したがって、数理モデルで振動子の位相の同期が説明できた。

６．今後の課題

解析したペットボトルにかかる力の大きさと、リミットサイクル振動子の運動方程式を元に、ペットボトル振動子の、より定量的な解析を行いたい。

７．謝辞

丁寧なご指導をしていただいた井川　健太先生、先行研究をされ、アドバイスしていただいた物理部の先輩、荻野恭輔さんにお礼申し上げます。

８．参考文献

[1] 荻野恭輔、山田怜史（2015-2016）「ペットボトル振動子」

[2] 田島裕二郎 (2005) ペットボトル振動子の周期変化
http://www.chem.scphys.kyoto-u.ac.jp/nonnonWWW/b8/04b/tajima/tajima.pdf

[3] 小平將裕; 北畑裕之 (2006) ペットボトル振動子:水/空気流が描き出す時空間構造(非線形現象のモデル化とその数理解析)
https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstre

[4] 菊池徹(2006)ペットボトル振動子の解析
http://www.chem.scphys.kyoto-u.ac.jp/nonnonWWW/b8/05f/kikuchi/kikuchi.pdf
am/2433/58802/1/1522-13.pdf

[5] 瀬戸山太一 (2011) ペットボトル振動子のリズム運動・同期現象
http://www.math.ryukoku.ac.jp/~tsutomu/undergraduate/2011/11_setoyama_pa.pdf

[6] Y. Kuramoto: Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence (Springer, New York, 1984)