折り紙を用いて作る容器の最大容積

石川県立金沢泉丘高等学校理数科

袖 元継　田原 功揮　中條 朝陽　御手洗 勇輝　柳澤 啓史

要旨

折り紙を一定面積の正方形と定義し、折り紙を折り曲げて作った容器の容積の最大と、最大になるときの容器の形を調べた。同一の表面積の容器内で容積が最大の半球を理想容器とし、半球の容積と他の容器の容積を比較したところ、手裏剣型容器の容積が現時点で最大の 79.9%(手裏剣型の容器の容積/理想容器の容積)をとった。

1．研究背景・目的

私たちは, 持ち運びやすい容器を製作することを最終目的とした。折り紙に代表されるシート状のものであれば持ち運びやすいと考え, 正方形の折り紙で製作すると制限を設けた上での最大容積をもつ容器の形を求めることを研究の目的とした。

2．研究方法

正方形の折り紙の一辺の長さを1として様々な図形を作り, 作った図形の中で最大となるときの容積を計算で求める。

容積は, 図形の上から水を注ぎ, こぼれずに入れられる水の量と定義し, 表面張力を考えないものとする。

また, 容器を製作する条件として, 折り紙を切ることはできないこと, 無限回折ることができること, 紙の厚さは考えないことの 3 つを定めた。

また, さまざまな種類の容器の容積を比較する際の基準として, 理想容器である半球の容積を求め, 容器ごとの半球との容積比で比較した。

球は表面積が同じとき、体積が一番大きい図形であることが分かっている。

3．先行研究

関西学院高等部によって, 折り紙を切ることを許した場合についての研究がなされている。「小笠図形」と名付けられた図形は, 一辺の長さを 12 としたときの容積が 186.1 であるという[*1]。「小笠図形」の半球との容積比は, 81.0%であることが分かっている。

4．考案した容器デザイン

図 1 考案した容器の形

私たちは, これまでに, 図 1 にある 9 種類の容器を考案した。図形の詳細は次で述べる。

(0) 半球

図 1 の上段左から,

(1) 直方体

(2) トレー型

(3) 舟型

中段左から,

(4) 巻寿司型

(5) 円筒

(6) 鉛筆型

下段左から,

(7) 三角錐

(8) 鬼灯型

(9) 手裏剣型

5．計算過程の詳細

n番目の容器の容積をv_n, 半球との容積比をp_nとする。煩雑な計算には, 計算サイト「WolframAlpha」を使用した。

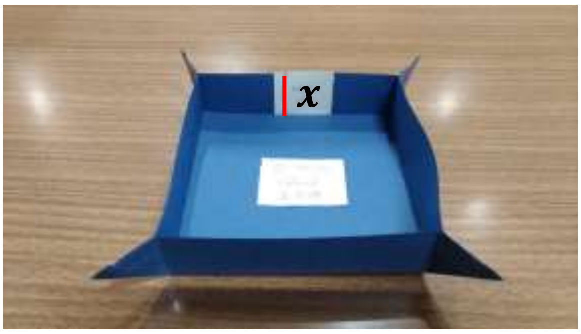
5-0. 半球

これは, 曲面の表面積が1である半球である。

半径rは, $2\pi r^2 = 1$より$r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$である。よって

容積は, $v_0 = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}$である。

5-1. 直方体



側面の高さを$x\left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$とすると,

$v_1 = x(1-x)^2$　$v_1{}' = (2x-1)(6x-1)$

$v_1{}' = 0$　$0 < x < \frac{1}{2}$ より,　$x = \frac{1}{6}$,

$v_1 = \frac{2}{27} \approx 0.07407$

$p_1 = \frac{2\sqrt{2\pi}}{9} \approx 0.5570$ (55.7%)

5-2. トレー型

側面の長さをx、羽の長さをt($0 < t \leq x < \frac{1}{2}$)とすると,

$$v_2 = \frac{\sqrt{2xt-t^2}}{6(x-t)}\{(1-2t)^3 - (1-2x)^3\}$$

$$\frac{d}{dx}v_2 = \frac{t(20t^2+4xt-18x+3)}{3\sqrt{2xt-t^2}}$$

$$\frac{d}{dt}v_2 = \frac{4x^3+(8t-6)x^2+3(1-2t)^2(x-t)}{3\sqrt{2xt-t^2}}$$

二元 3 次方程式　$\frac{d}{dx}v_2 = \frac{d}{dt}v_2 = 0$ を解くと,

$x \approx 0.2322$　$t \approx 0.1088$

≈ 0.08642

$p_2 \approx 0.6499$　(65.0%)

5-3. 舟型

上図の部分の長さをx($0 < x < \frac{1}{2}$)とすると,

$$v_3 = \left(x - \frac{4}{3}x^2\right)\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$$

$$v_3' = \frac{48x^3-24x^2-8x+3}{6\sqrt{1-4x^2}}$$

$v_3' = 0, 0 < x < \frac{1}{2}$なので,　$x = \frac{1}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{4\pi-\alpha}{3}$

ただし$\alpha \in \mathbb{R}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{933}}{36}$, $\cos\alpha = \frac{11\sqrt{3}}{36}$

小数にすると$x \approx 0.2734$より, 容積は$v_3 \approx 0.7273$, 容積比は$p_3 \approx 0.5469$となり 54.7%である。

5-4. 巻寿司型

容器に水を入れたとき、水面が正円になるような角度であるとする。このとき母線の長さが1、底面の円周の長さが$\frac{\pi}{2}$である円錐になるので、容積は$v_4 = \frac{\sqrt{15}}{192}\pi \approx 0.06337$となり，容積比は$p_4 = \frac{\sqrt{3\pi^3}}{64} \approx 0.4765$で，47.7%である。

5-5. 円筒

底面の円の半径は$\frac{1}{2\pi}$

$$v_5 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi \cdot \left(1 - \frac{1}{2\pi}\right) = \frac{2\pi - 1}{8\pi^2}$$

$p_5 = \frac{3\sqrt{2\pi}(2\pi-1)}{8\pi^2} \approx 0.5032$より,50.3%である。

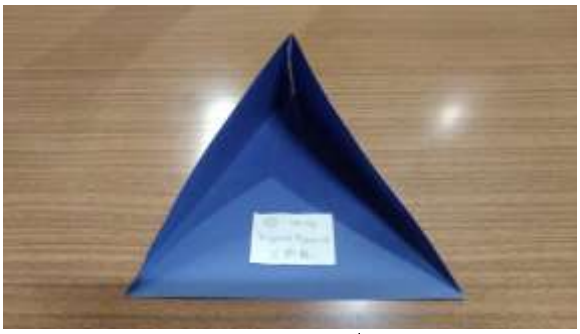
5-6. 鉛筆型

底円錐の母線の長さを$x\left(\frac{1}{2\pi} \le x \le 1\right)$とすると、$v_6 = \frac{1}{4\pi}\left(1 - x + \frac{\sqrt{(2\pi x)^2 - 1}}{6\pi}\right)$

$v_6' = \frac{2\pi x}{3\sqrt{(2\pi x)^2 - a}} - 1, v_6{}' = 0$となるときの$x$の値は,$x = \frac{3\sqrt{2\pi}}{4\pi}$

よって，$v_6 = \frac{1}{4\pi} - \frac{\sqrt{2}}{12\pi^2}, p_6 = \frac{3\sqrt{2\pi}}{4\pi} - \frac{1}{2\sqrt{\pi^3}}$ ≈ 0.5086より,50.9%である。

5-7. 三角錐



底面が正三角形で，高さが$\frac{1}{2}$の正三角錐である。

底面積は$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$なので，容積は$v_7 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{24}$となり，容積比は$p_7 = \frac{\sqrt{6\pi}}{8} \approx 0.5427$より54.3%である。

5-8. 鬼灯型

これは,折り紙の対角線の部分が半径$\frac{\sqrt{2}}{\pi}$の半球にぴったり内接し,半球の切断面に平行して

切ると,容器の断面が正方形となる図形である。

このとき容器の口の正方形の面積は,$\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\sqrt{2}\right)^2$

$=\frac{4}{\pi^2}$となる。半径$\frac{\sqrt{2}}{\pi}$の円の面積は$\frac{2}{\pi}$なので,切り口の面積比は$\frac{4}{\pi^2}:\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}:1$である。

容器を包む半球の体積は

$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\pi}}\pi\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^2-x^2}\right)^2dx=\frac{4\sqrt{2}}{3\pi^2}$なので,容積は$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{3\pi^2}=\frac{8\sqrt{2}}{3\pi^3}$となった。

しかし,研究途中で最初に考案した鬼灯型が作成不能であることが判明した。折り紙の向かい合う辺の中点を結んだ線分は 1 であるため,そこに対応する容器上の線分の長さは 1 以下である必要がある。曲線は,短径$\frac{1}{\pi}$,長径$\frac{\sqrt{2}}{\pi}$の楕円の半周であるため,曲線を 1,000 等分した直線に近似して長さを計算すると,1.216 となり,予想していた高さを得ることができないことがそこで,高さをhとして容器の体積の式を求めると,

$\frac{2}{\pi}\cdot\int_{\frac{\sqrt{2}}{\pi}-h}^{\frac{\sqrt{2}}{\pi}}\pi\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^2-x^2}\right)^2dx=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}h^2-\frac{2}{3}h^3$

となる。この高さをコンピュータで求めることにした。

短半径$\frac{1}{\pi}$,長半径$\frac{\sqrt{2}}{\pi}$の楕円を極座標に表すと,

$r(\theta)=\frac{1}{\pi\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{2}+\sin^2\theta}}$

である。ここで,2πをd個に区切るとすると,1 個当たりの角度は$\frac{2\pi}{d}$であり, $r(\theta)$と$r\left(\theta+\frac{2\pi}{d}\right)$の間の楕円の周の一部分を直線とみたときの長さは,

$\sqrt{\left(r\left(\theta+\frac{2\pi}{d}\right)\sin\frac{2\pi}{d}\right)^2+\left(r(\theta)-r\left(\theta+\frac{2\pi}{d}\right)\cos\frac{2\pi}{d}\right)^2}=$

$\sqrt{r(\theta)^2-2r(\theta)r\left(\theta+\frac{2\pi}{d}\right)\cos\frac{2\pi}{d}+r\left(\theta+\frac{2\pi}{d}\right)^2}$

である。

ここで, $\theta=0$から$(n-1)$回$\frac{2\pi}{d}$を足していくと,近似した周の長さは$\mathrm{L}=$

$\sum_{k=0}^{n}\sqrt{r\left(\frac{2\pi n}{d}\right)^2-2r\left(\frac{2\pi n}{d}\right)r\left(\frac{2\pi(n+1)}{d}\right)\cos\frac{2\pi}{d}+r\left(\frac{2\pi(n+1)}{d}\right)^2}$

であり, $\mathrm{L}\geq1$となる最小の自然数$n(0<n\leq d-1)$を求める。このとき,容器の高さは

$\frac{\sqrt{2}}{\pi}-r\left(\frac{2\pi n}{d}\right)\cos\frac{2\pi n}{d}$

である。

分割数を変えて高さと容積比を計算すると,表 1 のようになった。これより,鬼灯型の容積比は 59.3%であることが分かった。

分割数d	高さ	容積	容積比
16	0.45016	0.12163	0.91463
32	0.38746	0.09638	0.72478
64	0.35575	0.08393	0.63111
128	0.35575	0.08393	0.63111
256	0.34776	0.08084	0.60793
512	0.34376	0.07931	0.59639
1024	0.34376	0.07931	0.59639
2048	0.34275	0.07892	0.59350
4096	0.34275	0.07892	0.59350
8192	0.34275	0.07892	0.59350
16384	0.34275	0.07892	0.59350
32767	0.34270	0.07891	0.59336

表 1 分割数と容積比の関係

5－9. 手裏剣型

これは, 折り紙の向かい合う辺の中点を結んだ部分が半径$\frac{1}{\pi}$の半円に内接し, 容器の口が平

面になるように辺のほかの部分を持ち上げた図形である。(下図 2 参照)

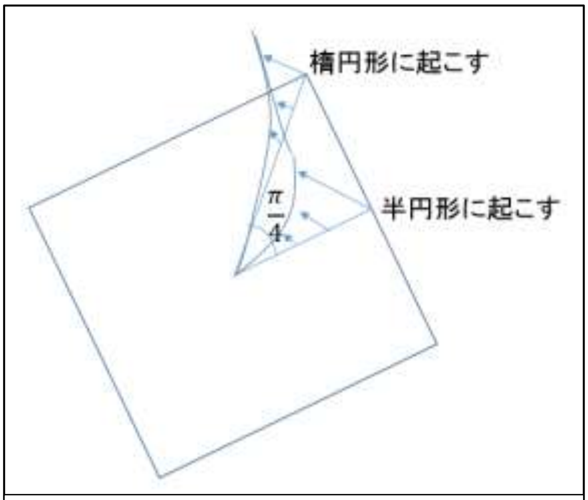


図 2 手裏剣型のイメージ

容器は点対称な図形であり, 対称の軸を含む平面で切ったときの断面である楕円の長半径の式を求め, 切り口を表す式を導き出すことで容積を求める。

折り紙の重心を原点とし, 軸と 1 つの辺が垂直に交わる極座標$(\theta, r(\theta))$において, $\theta = 0$の部分は半円状に折り, $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$の部分は楕円状に折る。ほかの部分も$0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$の部分と同様に折る。

長半径a, 短半径bの楕円の周長をCとして, 3 つの近似式[*2] を用いた。

$$C = 2\pi a\left(1 - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\right) \cdots ①$$

$$C = \pi(a+b)\left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right) \cdots ②$$

$$C = \pi\left(3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right) \cdots ③$$

これらを a について変形すると,

$$①a = \frac{C}{3\pi}\left(1 + \sqrt{1 - 3\left(\frac{b}{C}\pi\right)^2}\right)$$

$$②a = \frac{-3\pi b + 2C + 2\sqrt{-4\pi^2 b^2 + 2\pi bC + C^2}}{5\pi}$$

$$③a = \frac{-4\pi b + 3C + \sqrt{-20\pi^2 b^2 + 12\pi bC + 3C^2}}{6\pi}$$

3 式に$b = \frac{1}{\pi}$, $C = \frac{2}{\cos\theta}$を代入すると,

$$①a = \frac{2 + \sqrt{3 - \cos^2\theta}}{3\pi\cos\theta}$$

$$②a = \frac{4 - 3\cos\theta + 2\sqrt{\cos\theta + \sin^2\theta}}{5\pi\cos\theta}$$

$$③a = \frac{3 - 2\cos\theta + \sqrt{3 + 6\cos\theta - 5\cos^2\theta}}{6\pi\cos\theta}$$

3 式に$\theta = \frac{\pi}{4}$を代入すると,

$$①a = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{5}}{3\pi} \approx 0.537360$$

$$②a = \frac{4\sqrt{2} - 3 + 4\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{5\pi} \approx 0.564806$$

$$③a = \frac{3\sqrt{2} - 2 + \sqrt{1 + 6\sqrt{2}}}{3\pi} \approx 0.564730$$

コンピュータによる計算(ニュートン・ラフソン法)では, 短半径$\frac{1}{\pi}$, 周長$2\sqrt{2}$の楕円の長半径は0.5647であるため, 容積の計算では結果が近い③の式を用いる。

$$a = \frac{3 - 2\cos\theta + \sqrt{3 + 6\cos\theta - 5\cos^2\theta}}{6\pi\cos\theta}$$

容器の口の部分の面積は,

$$4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\, d\theta \approx 0.500474$$

容器の口の部分と, それに外接する円の面積との比は,

$$0.500474 \Big/ \left\{\pi\left(\frac{3\sqrt{2} - 2 + \sqrt{1 + 6\sqrt{2}}}{3\pi}\right)^2\right\} = \alpha$$

容器に外接する楕円体の体積は,

$$\frac{2}{3}\pi \cdot \frac{1}{\pi}\left(\frac{3\sqrt{2} - 2 + \sqrt{1 + 6\sqrt{2}}}{3\pi}\right)^2 = \beta$$

よって, 手裏剣型の容積は,

$$v_9 = \alpha\beta = \frac{2 \cdot 0.500474}{3\pi} \approx 0.1062$$

$$p_9 = 3\sqrt{2\pi} \approx 0.7986$$

より, 手裏剣型の容積比は 79.9%であることが分かった。

６．結果と考察

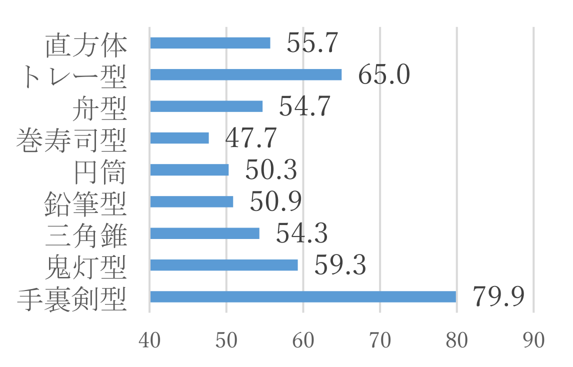


図 3 計算結果

４. で求めた容積比の結果をグラフに表すと，図 3 のようになった。調べた中で，最も容積比が多かったのは手裏剣型で，トレー型，鬼灯型が後に続いた。

このような結果になった理由として，理想容器である半球に近いかどうかと，折り紙の使用率が関係しているのではないかと考えた。

容器の形状がより半球に近くなるために，容積は直方体よりトレー型，トレー型より手裏剣型の方が大きくなる。しかし，トレー型より鬼灯型の方が小さくなるのは，鬼灯型は角の部分を容積に含まないためだと考えた。

７．今後の課題

今後の課題とすべきことは 2 つある。

1 つは，最も重要な，最大容積であると証明する手法の確立である。現在の研究方法では証明することはできないため，別の角度から研究を行う必要がある。

もう 1 つは，計算の際に使用した手裏剣型と，実作した手裏剣型で違いがあったことである。計算の際に使用した手裏剣型では，折り紙の対角線の部分が楕円になると予想したが，実作した手裏剣型では，その部分は角が約45°になっていた。その部分の曲線がどのようなものか推定できていないが，楕円でないことは明らかである。容器の口の計算の際に使用した手裏剣型は0.5647であるのに対し，実作した手裏剣型は0.61であった。そのため，後者はより容積が大きい可能性があるが，確証を得ることはできず，今後研究をする必要がある。

８．参考文献

[*1] 小笠図形の体積:数-学(http://ma-3517hm.cocolog-nifty.com/blog/2013/07/post-ef55.html)

[*2] Wikipedia-楕円(https://ja.wikipedia.org/wiki/楕円)