

倍音と弦の状態の関係について

石川県立金沢泉丘高校 2年

薄田 凌 砂山 風磨 西山 友真 矢野 凌

1. 要旨・概要

私たちの日常には多くの音が溢れていて、そのおのおのの音には、倍音が含まれている。

音というのは空気の波であるが、一般にそれらの波形は複雑な形をしている。しかし、周期的に変化しているため、周波数の違う複数の正弦波の和として表すことができる。そのため、ある音は複数の周波数の音が足し合わさることで成り立っているということが出来る。

倍音とは、そのような一つの音を構成する多くの周波数の波のうち、その最も低い周波数の音を基本音としたとき、その整数倍の周波数の波のことである。

一般に、私たちは倍音を多く含む音ほど豊かな音と感じる。また、楽器の音には倍音が多く、楽器特有の豊かな音を作り出すのに貢献している。先行研究ではピアノの音の倍音の含まれ方に関する研究はなされていたが、弦を交換するなどといった実験はされておらず、倍音に関する条件を一般化するには至っていなかった(参考文献参照)。そこでわれわれは、手に入りやすいギター弦を用いて、より倍音を多く含む音を発生する発音体の条件を見つけることを目的とする研究をおこなった。

この研究では、1本のギター弦を持つ実験装置を自作し、弦の条件を変えて採音し、フーリエ変換を用いて周波数分析を行った。

フーリエ変換とは実変数の複素または実数値関数を別の同種の関数に写す変換であるが、本実験での音に対するフーリエ変換は、ある音その音を構成する単純な正弦波で表せる個々の周波数の音に分解し、それらの周波数を横軸、振幅を縦軸にとり周波数ごとの音量を示すグラフに変換する事と定義する。

実験の結果、弦の張力が大きくなるほど、倍音の数は増加した。よって、倍音の数は張力とのある程度の相関があることが分かった。

弦楽器においては、任意の周波数の音を出す状態の弦において、より張力を大きくすることで、より多くの倍音を発生することができる

いえるだろう。

しかし倍音の音量変化を定式化してあらわすことはできなかったため、倍音ごとにエネルギーが蓄えられるという仮説をたてるにいった。

2. 研究目的

私たちの研究の目的はギター一弦における倍音の数、音量がより大きくなる条件を見つけ、その条件を一般化して実際の楽器に応用することである。実際の楽器においては弦楽器の他に打楽器、管楽器等があるため一概にこれらに適用するのは難しいが、同じ弦楽器内では応用が十分可能であると考えられる。この倍音に関する条件を一般化することで楽器の音をより豊かにすることに限らず、楽器以外の音でもより心地よい音を作ることができるだろう。あるいは、発見した原理を最大限に活用できる新しい楽器の開発なども可能であると考えられる。また、単純に倍音を増やすだけでなく奇数倍音や偶数倍音の数、大きさを調節できるようになれば音色を変化させることが可能になり、さらには逆に倍音を意図的に減らすことでまた違った効果が得られるのではないかと考えた。

仮説として、倍音の数、大きさは弦の長さ、張力、密度に関係があると考えた。なぜなら、弦の固有振動数公式の中に弦の固有振動数がこの3要素に影響されることが読み取れるからである(式1)。

$$f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{S}{\rho}}$$

(式1)弦の固有振動数公式

弦の固有振動数: f [Hz]

弦の張力: S [N]

弦の長さ: l [m]

1m 当たりの質量 (線密度) : ρ [kg/m]

また、さらに具体的に考察した結果、倍音が含まれやすい条件は音が長く残りやすい条件に似ているのではないかと考えた。なぜならこの2つは共に弦の振動のしやすさに影響されていると思われるからである。

そこで我々は、ピアノ線等に比べ比較的入手が容易で実験装置を簡単に作れるといった理由で研究対象としてギター弦を選定した。

実験装置の説明

私たちは、弦と倍音の関係を調べるにあたり、以下のような実験装置を製作した。

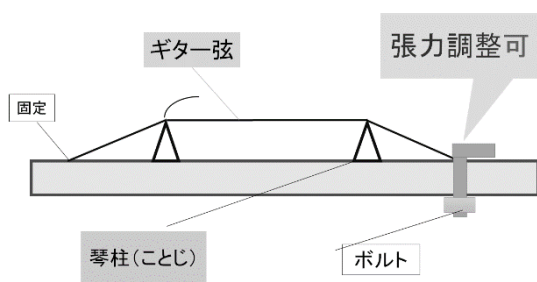


図1

〈材料〉

- ・ギター弦
「REGULAR SLINKY
ERNIE BALL®」
素材：ニッケル
弦の直径：0.026 インチ (0.66 mm)
- ・木材 (全長 1m)
- ・琴柱
- ・ねじ、ボルト
- ・釘、万力

〈装置の仕組み〉

- ① 木材に穴をあけ、ねじとボルトでギター弦の一方を固定する。他方は弦の端にあるリングに釘を刺し、木材に固定したうえでさらに万力で固定した。このとき、ねじを絞める強さを変えることによって、弦の張力を変えることができる。
- ② 弦と木材の間にプラスチック製の琴柱を2つはさみ、十分に弦を張る。2つの琴柱の間隔を変えることで発音に関わる弦の長さを変えることができる。この研究において「弦の長さ」は、振動し発音に関わる2つの琴柱間の長さをいう。

この実験装置を使うことにより、木材に弦を張っただけである装置であるため、弦をはじいた際の共鳴による結果への影響を小さくすることができる。また、ギター弦が実験途中で切れてしまった場合、同じ材質・密度の弦を調達することが可能である。このことから、実験の再現が容易である。

3. 研究方法

前述の方法で作った研究装置で、張力と倍音との関連を調べるために次のような実験を行った。

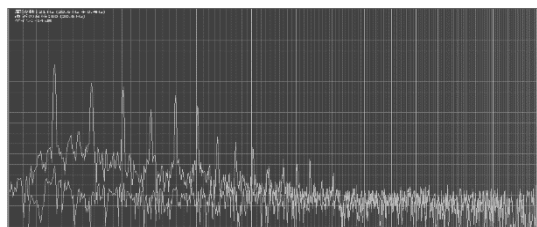
- ① 実験装置の弦の長さを固定する。
- ② 弦の中心を弾く。
- ③ その音を録音しコンピュータに取り込む。
- ④ その音を、Wavepad を用い周波数ごとの音量を調べる。
- ⑤ 張力を変え②から繰り返す。

この実験を行う事で、ある張力の時の倍音の音量や数を調べる事ができる。今回は、二種類の長さの弦について、複数回張力を変えて実験した。

ここでこの実験の再現性について説明する。実験環境の湿度や気温、はじく人間の力加減、また周囲の雑音などにより倍音の数やその音量に誤差が生じると考え、それらの影響は極力受けないように留意し実験していたが、改めて実験の再現性を確認した。

以下に実験装置の発した音 (上の線) と周囲の雑音 (下の線) を重ねたグラフ (図2) を示す。また同じ弦の長さ、張力で行った二度の実験を比較したグラフ (図3) を巻末に示す。

図2



この図のように、一つのデータに対しその時に流れていた周囲の雑音のグラフを重ね、見比べることができるので、たとえ実験中に雑音が入ってしまっても、弦から出ている音と区別ができるので問題はないと考えられる。

また図3では各倍音の音量の大きさの順位は変わらないためある程度の再現性は保障されていると考えた。

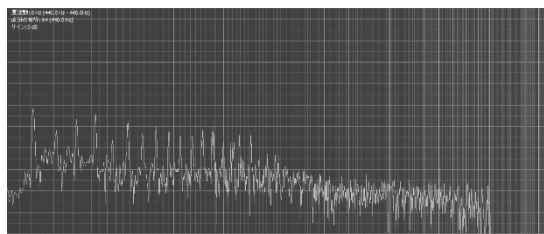
4. 結果

弦の長さは 20cm,40cm で固定し実験した。グラフを(巻末)に示す。このグラフでは、弦をはじいた後、解析したグラフの形が鮮明になった瞬間の倍音の組成について解析したものである。以下はそのグラフを基に読み取った周波数と計算した張力の表とグラフを一部抜粋したものである。

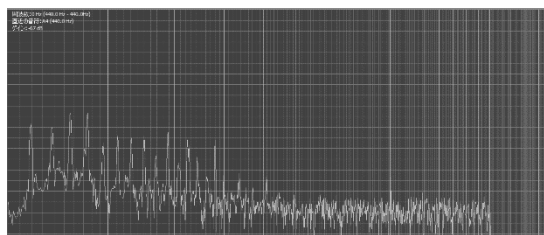
実験番号	周波数[Hz]	張力[N]
1	226	76.57
2	204	62.39
3	193	55.84
4	183	50.20
5	161	38.86
6	150	33.73
7	139	28.96
8	129	24.95

表1 弦の長さが40cmのデータ

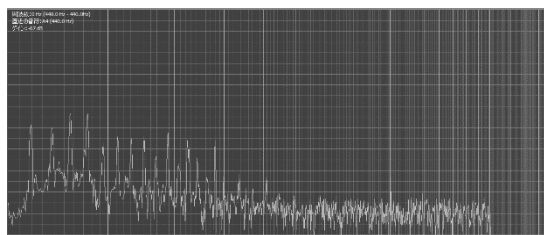
204Hz (実験番号2)



183Hz (実験番号4)



139Hz (実験番号7)



以上のグラフより、張力が小さい時は基本音の周波数が低く、倍音が少なかったが、張力が大きくなるにつれそれらの値も大きくなると分かった。

倍音の音量は時間によって連続的に変化する。その変化を確認するために、新たに30cmの弦から出る音を解析し、時間の変化に伴う第5倍音までの音量変化を示した。

横軸は弦をはじいてからの経過時間、縦軸はおのおのの倍音の音量である(時間変化グラフ1-3)。これらのグラフは、先述のグラフと併せて巻末に掲載した。このグラフから、倍音の音量は時間が変化することで大きく変化し、大小関係が変化するものもあった。

5. 考察

今回の研究結果に関して、張力が増加するにつれて倍音が増えている区間があり、倍音の音量も大まかにみて増加していることから、基本音に対する倍音の音量や、その数は、弦にかかっている張力に関係しそうだと分かった。

ただし、張力を上げることで各々の倍音が一様に増加するものではなく、また時間ごとの変化を追ったグラフでは、倍音の音量の大小が逆転している箇所がいくつもあり、倍音のそれぞれの音量は張力と単純に相関関係があるといえるものではないと判断した。

特に実験番号5と実験番号6のデータ間において、比較的周波数が低い倍音の音量の比は大きく変化していないのに対し、倍音と認められるグラフの山の数は増加していた。また張力を上げるに従い、データ3のように、基本音の音量を倍音が上回るようになっていった。

これらの実験結果を説明するために、振動している弦が持つエネルギーに注目した。物体を通過する波に関して、単位時間あたりに通過するエネルギーはこのように記述できる事が知られている(式2)。

$$I = 2\pi^2 \rho v f^2 A^2$$

(式2)単位時間に通過する波のエネルギー

単位時間に通過するエネルギー: I [J/m²・s]

媒質の密度: ρ [kg/m³]

波の伝わる速さ: v [m/s]

振幅: A [m]、振動数: f [Hz]

弦で単振動が発生している場合、波が弦を連続的に通過していると考え、弦が持っているエネルギーとこの式を関係づけることができ、この値が大きいほど、弦が蓄えているエネルギーが大きいと定めることにした。

弦の張力を高めると、(式1)より、弦の周波数は上昇する。またそれと同時に、弦から大きな音が発しやすくなる。(張力を上げると大きな音が発しやすくなるというのは経験則的ではあるが、張力を上げるにより、弦が標準の位置へと戻ろうとする力が大きくなり、より多くの力を加えて弦をはじくことができるようになることに加え、空気抵抗などによる抵抗の影響が出にくくなったと考えることで説明できる。) 周波数はそのまま(式2)にあり、また音量も振幅Aと関係があるとされているので、張力が増えることで、周波数と振幅が大きくなり、弦に蓄えられるエネルギーが増えるといえる。

私たちは、その蓄えられたエネルギーが倍音として表れているのではないかと考え、以下の仮説を立てた。

「それぞれの倍音は別個にエネルギーを蓄えることができ、低い周波数の倍音のほうが、単位時間当たりの振動数が少ないため、空気の抵抗などの影響を受けにくく、減衰しにくい、すなわち安定してエネルギーを蓄えられる。張力の増加によって弦は多くのエネルギーを蓄え、それを安定しやすい低次の倍音から徐々に高次の倍音に分配することで、分配された倍音は音量が増し、分配し終えたらまた低次の倍音から満たされていく。」

というものだ。

そうすると、倍音が張力の増加とともに一様に増加しなかった点を説明することができ、また、高い倍音は基本音よりも周波数が高く、

(式2)より、多くのエネルギーを蓄えることができることを考えることで、倍音の音量が基本音の音量を超えたことも説明することができる。

また、その倍音に蓄えられたエネルギーが倍音同士を行き来出来るとすると、時間によって倍音の大小関係が変化したことも説明できる。

時間変化を追ったグラフに関して、倍音の音量は最終的に、音量を変化させながら、基本音が一番大きく、高い倍音になるにつれて小さく

なるように収束するというデータが得られた。この結果も、先ほどの仮定を認めたら、時間変化により、弦に含まれるエネルギーの総量が減少したことで安定しやすい基本音にエネルギーが移っていき、安定しにくい高い倍音のエネルギーが減少したためと考えられる。

6. 結論

弦をはじいた瞬間に含まれる倍音の音量や数は、長さは一定で張力を変化させた状態の下では、張力が増えるほど大きく、数も多くなる傾向が見られた。そのため、一つの弦から瞬間的に出る倍音を増やしたい場合は、その弦にかかる張力を増加させればよいといえる。

ただし、その変化は一様ではなく、定式化して表すことができなかった。そのため、弦の張力という考え方を拡張して、弦に蓄えられるエネルギーを増加させることで倍音が増えるという仮説を新たに立てた。

今回の実験に関して、以下のような課題が残っていると考える。

第一に、今回の研究結果に対して、張力が極端に大きいものと小さいものとを比較すると倍音の変化は顕著であったが、張力の差が少ないところにおいては倍音の変化が認められないデータもあり、張力の増加が結局どれほど倍音の増加に貢献できたかが、定式化されていない。

第二に、(式1)に示されているように、張力の式に現れているパラメータは張力のみではなく、弦の線密度、振動部分の長さといった今回の研究で注目しなかったものがいくつかある。それらについても実験を行うことで、新たに立てた仮説を支持する結果や、あるいは定式化に役立つデータが出てくる可能性がある。

第三に、今回の研究はすべて同じ部屋でほぼ同時期に行ったものであったが、湿度、気温の変化を考慮していなかった。再現性についての確認をしたものの、弦の素材は金属であったため、温度によって伸び縮みする。これが実験に影響を与える可能性がある。加えて、データ解析の関係から、複数のデータの平均を取ることができなかった。データの解析方法をより深く考査し、誤差の少ないデータを取ること、解消されるものと考えられる。

第四に、新たに立てた仮説を支持するデータが十分でないことがある。(式2)では、弦に

含まれるエネルギーを推測し、ある程度の大小関係を比較することはできたが、数値としてエネルギーを算出することはできなかった。弦に与えるエネルギーを計測し、倍音ごとのエネルギーを定義することができれば、倍音の変化を定式化して示すことができるだろう。

7. 参考文献

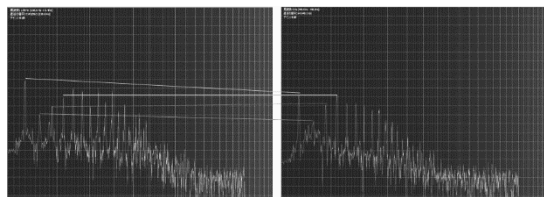
- ・日本音響学会 (1996)
『音のなんでも小辞典』講談社
- ・NCH Softwear 「wavepad 主な機能」
<<http://www.nch.com.au/wavepad/jp/screenshots.html>>
- ・泉 春那 釜田 ひかり 富澤 咲良 (2013)『音の数学的性質』
- ・柳沢 猛 中村 喜十郎 (2009)
『ピアノの一本唸の研究』
https://www.jstage.jst.go.jp/article/jjspe1933/33/3/85/33_385_111/_pdf

8. 謝辞

今回の研究を行うにあたって、多くの先生方にご指導をしていただきました。また、参考資料などもご用意していただき、研究の内容をより深いものにすることができました。この場を借りまして、謝辞を申し上げます。

9. 図表・画像

再現性 (図3)

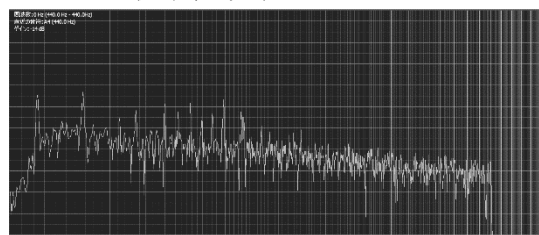


(1) 弦の長さ 40cm

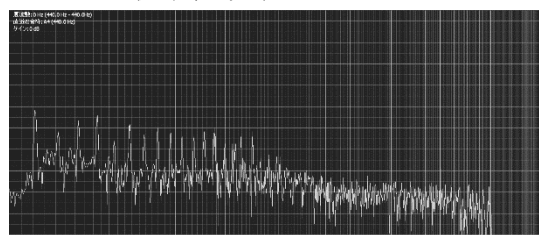
実験番号	周波数[Hz]	張力[N]
1	226	76.57
2	204	62.39
3	193	55.84
4	183	50.20
5	161	38.86
6	150	33.73
7	139	28.96
8	129	24.95

表1 弦の長さが 40cm のデータ

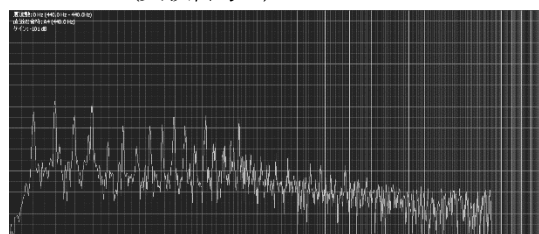
226Hz (実験番号 1)



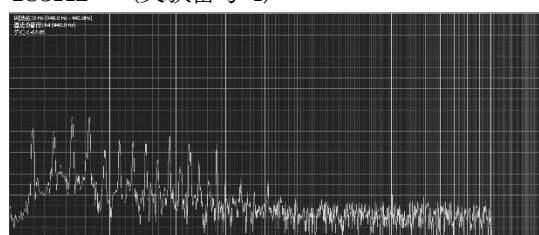
204Hz (実験番号 2)



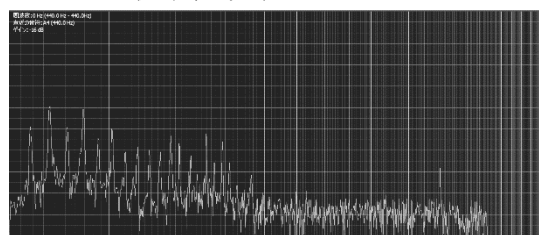
193Hz (実験番号 3)



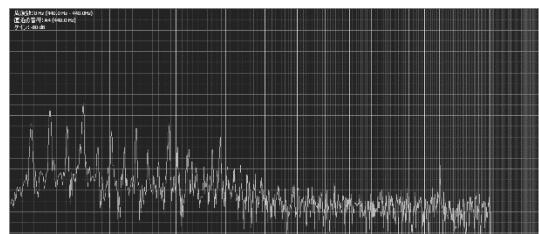
183Hz (実験番号 4)



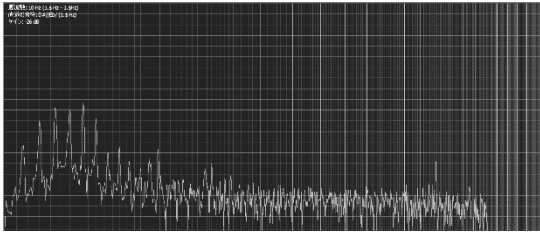
161Hz (実験番号 5)



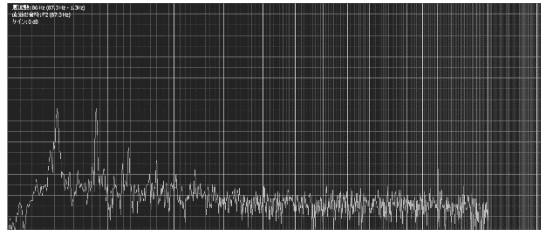
150Hz (実験番号 6)



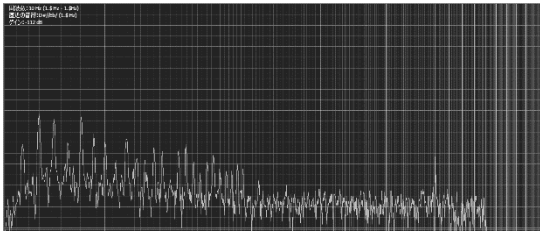
139Hz (実験番号 7)



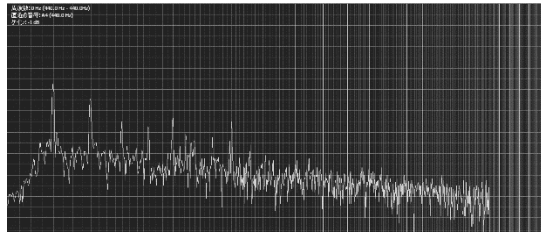
419Hz (実験番号 11)



129Hz (実験番号 8)



387Hz (実験番号 12)

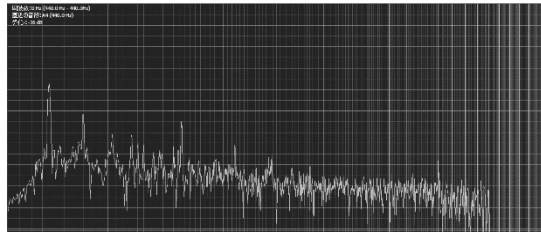


(2) 弦の長さ 20cm

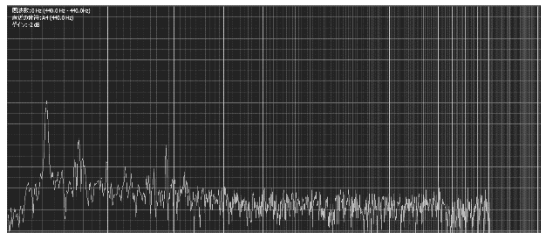
実験番号	周波数[Hz]	張力[N]
9	484	87.79
10	452	76.57
11	419	65.80
12	387	56.13
13	333	41.56
14	322	38.86
15	290	31.52
16	366	50.20

表 2 弦の長さが 20cm のデータ

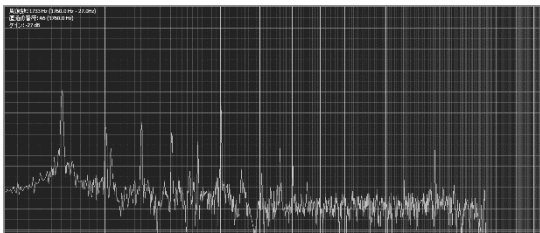
333Hz (実験番号 13)



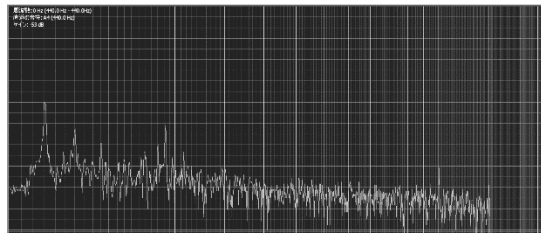
322Hz (実験番号 14)



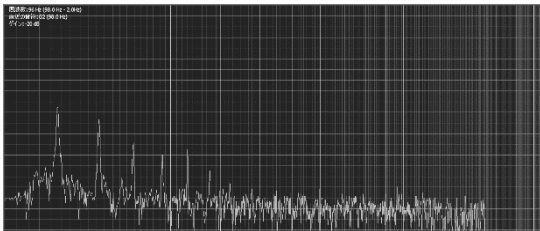
484Hz (実験番号 9)



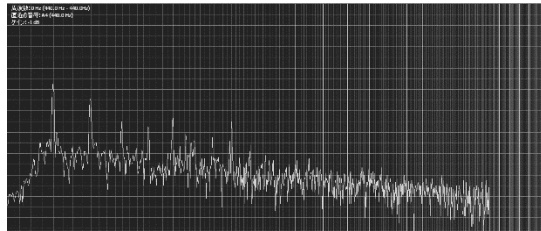
290Hz (実験番号 15)

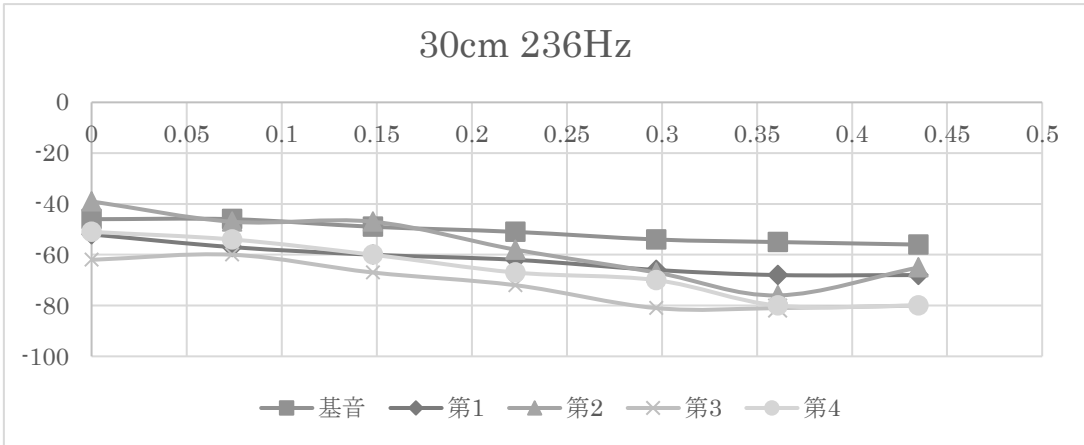


452Hz (実験番号 10)

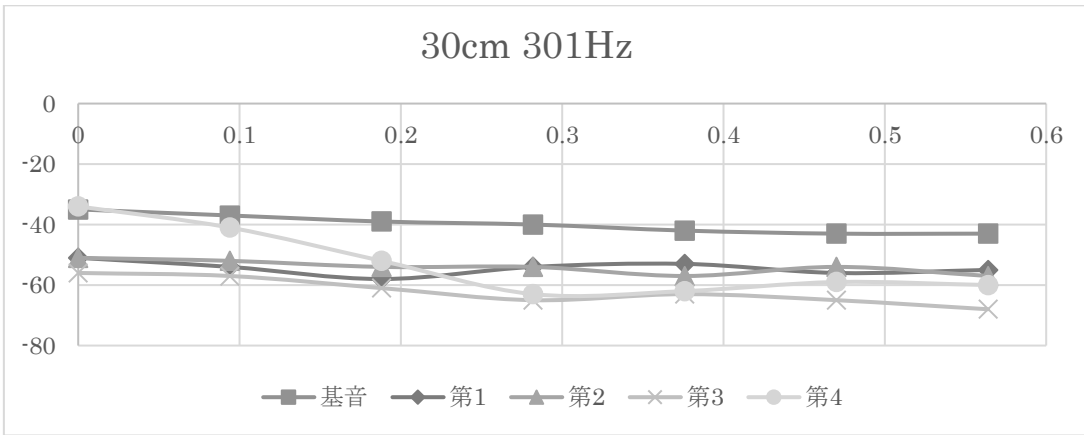


366Hz (実験番号 16)

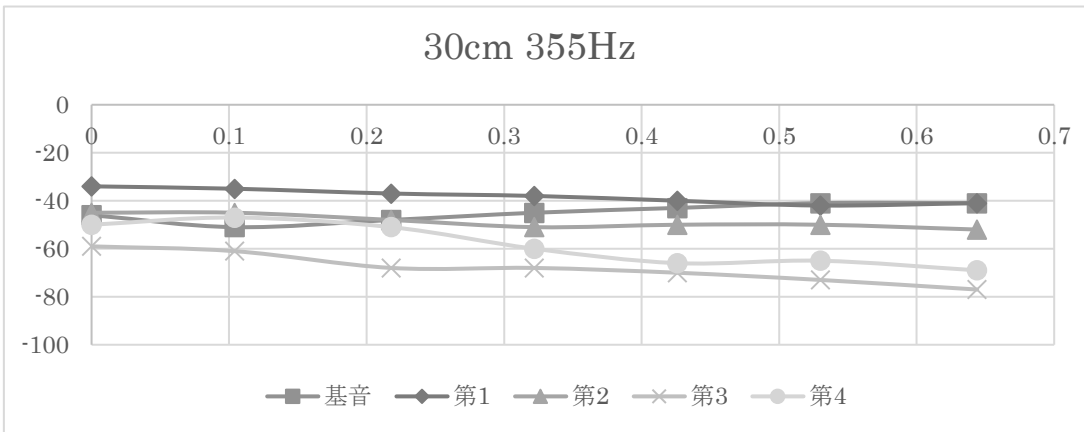




(時間変化グラフ 1)



(時間変化グラフ 2)



(時間変化グラフ 3)