自然科学における数学の活用

ー最小作用の原理ー

目標

1

- 課題解決のための数学活用力を身につける
- 「最小作用の原理」の視点で自然現象を眺められるようになる

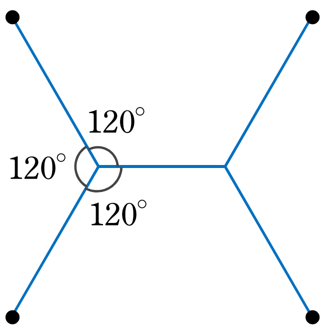
最小作用の原理

"自然界の様々な現象では、ある量が 最小値をとる 状態が実現する"

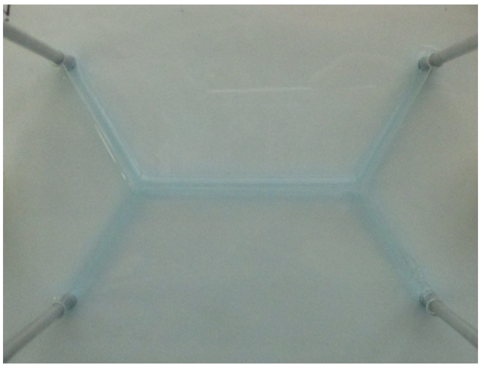
ある量（の積分）が最小値をとるという形に表された原理は、
"最小作用の原理"と呼ばれる.
自然界の法則の中には、最小作用の原理の形で表現されるものがしばしば存在する.

最短経路

この4点を最短で結ぶ経路は何か？
（4点すべてを結ぶ線の全長を最小にするにはどうすればよいか？）



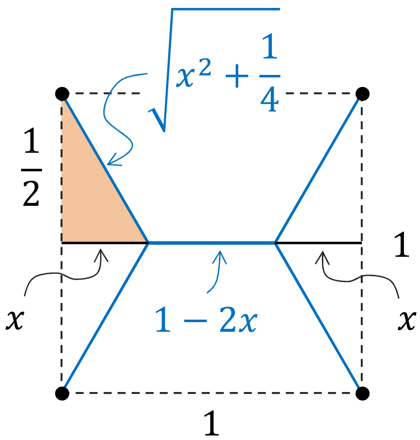
各線分が角度120°で交わる

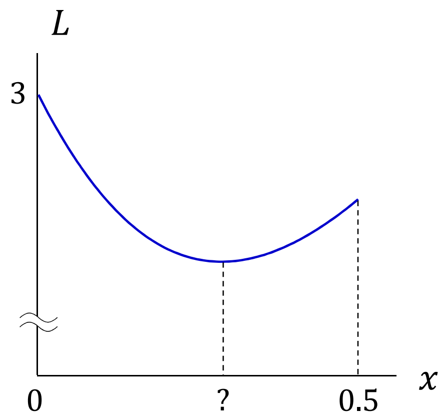


4本の棒に張ったしゃぼん膜

これが最短経路であることを証明することができますか？

経路の全長 L を x の関数で表す．　$L = 4 \times \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} + 1 - 2x$





L を最小にする x はいくらか？

“最短経路”を見つける（L を最小にする x を求める）ための方法は何か？

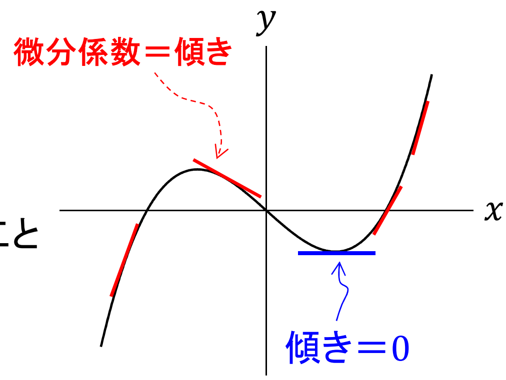
$\longrightarrow$ “微分” を使って最短経路を求めることができる.

微分とは何か？

$\longrightarrow$「微分とは、関数の ”変化率” である」

視覚的には、⇩

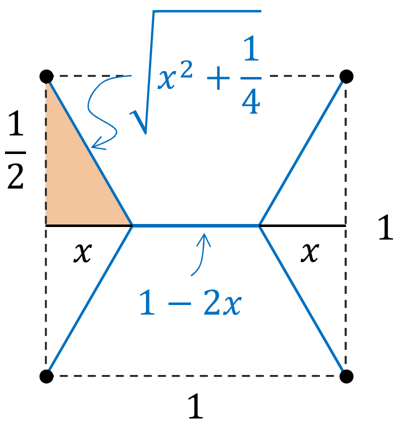
関数の “接線の傾き”のこと

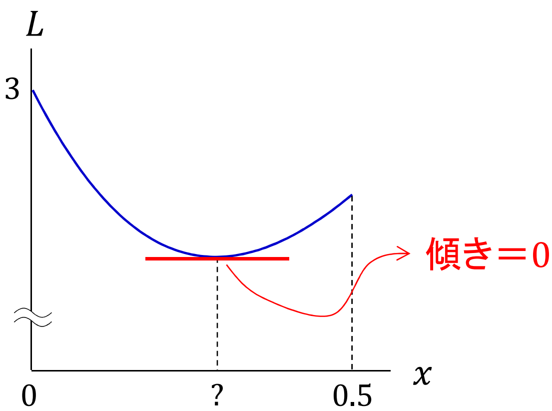


“導関数をゼロとする“ ことにより、その関数の最小値を求めることができる

経路の全長 L を x の関数で表す.

$$L = 4 \times \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} + 1 - 2x$$

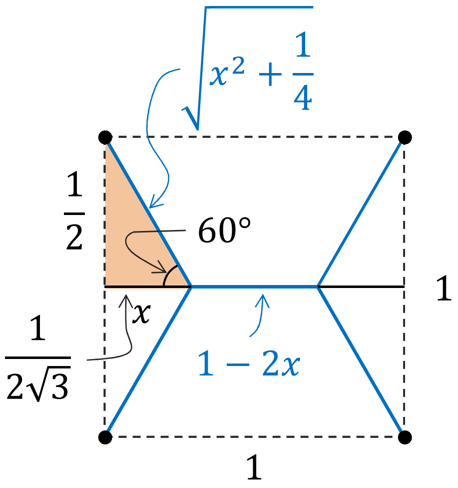




経路の全長 L の微分係数が 0 になるところが、最短経路になる x を表す.

6

“最短経路”を見つけるために経路の全長 L を x で微分する.



$$L = 4 \times \sqrt{x^2+\frac{1}{4}} + 1 - 2x$$

xで微分する.

$$\frac{dL}{dx} = \frac{4x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}} - 2 = 0$$ とする.

これを解くと、

$$12x^2 - 1 = 0 \longrightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

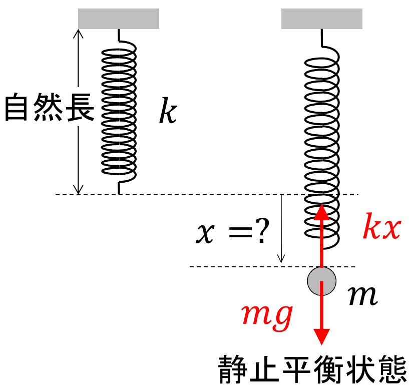
各線分が角度120° で交わるような経路が“最短経路”になる.

7

力学における最小作用の原理 ーつりあい問題ー

力のつりあいの状態において、“最小値をとる量“がある.

ばね定数kのばねの一端を天井に固定し、他端に質量mのおもりを取り付けてつるすと、静止平衡状態になった.



1. ばねの自然長からの伸び x はいくらか？

力のつりあい

$$kx = mg \longrightarrow x = \frac{mg}{k}$$

8

“力がつりあっている状態“をエネルギーの視点で考える.

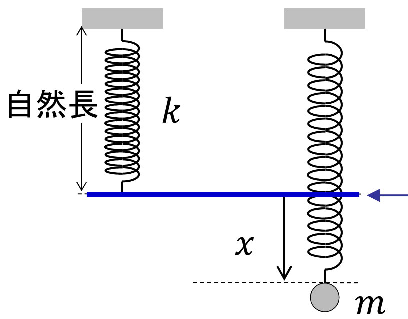
2. おもりの位置エネルギーを計算しよう.

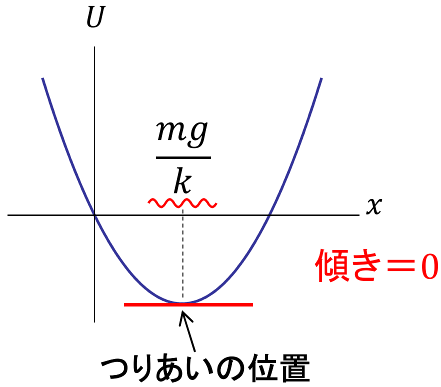
弾性力の位置エネルギー

重力の位置エネルギー

$$U = U_s + U_g$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - mgx$$



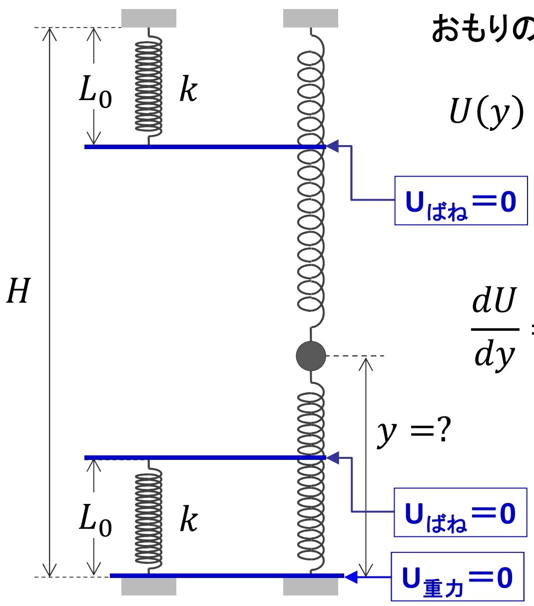


（摩擦のない）つりあい問題における最小作用の原理

力がつりあっている状態では、位置エネルギー が最小値をとる.

9

小球がつりあう位置はどこか？



おもりの位置エネルギー

$$U(y) = mgy + \frac{1}{2}k(y - L_0)^2 + \frac{1}{2}k(H - L_0 - y)^2$$

yで微分する.

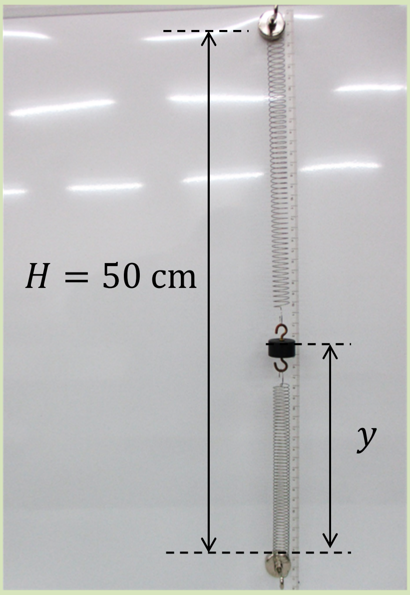
$$\frac{dU}{dy} = mg + k(y - L_0) - k(H - L_0 - y) = 0$$

とする.

これを解くと、

$$y = \frac{H}{2} - \frac{mg}{2k}$$

実験によって確かめよう.



$k = 7.54$ gw/cm

$H = 50$ cm

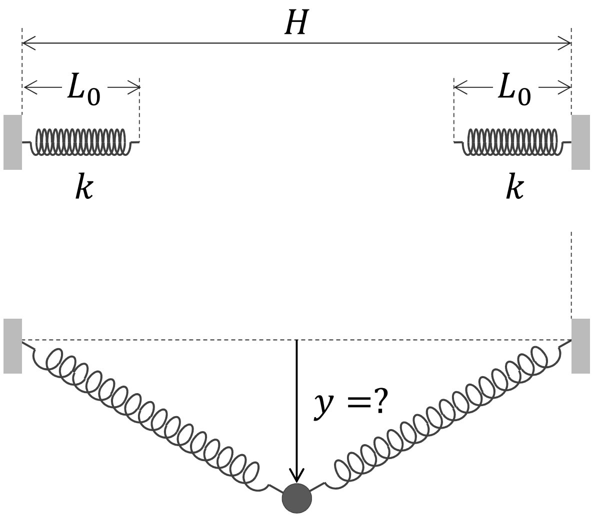
$$\boxed{y = \frac{H}{2} - \frac{mg}{2k}}$$

$$y = 25 - \frac{50}{2 \times 7.54}$$

$$= 25 - 3.3$$

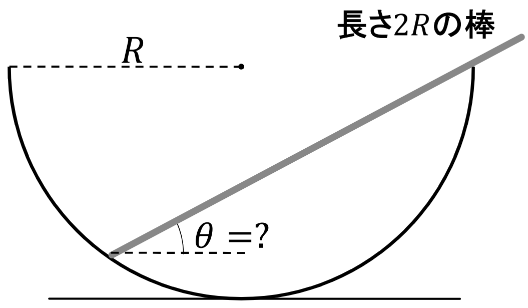
$$= 21.7 \text{ cm}$$

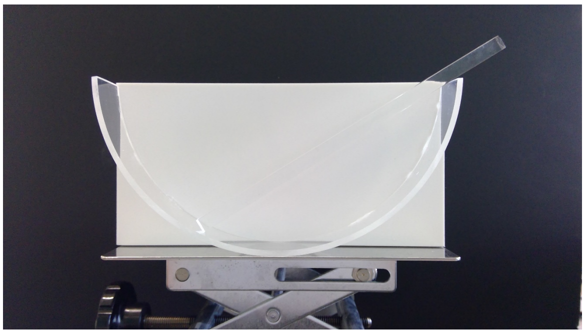
これは？



12

摩擦のない球状の容器に入れた棒は水平からどれだけ傾いてつりあうか？



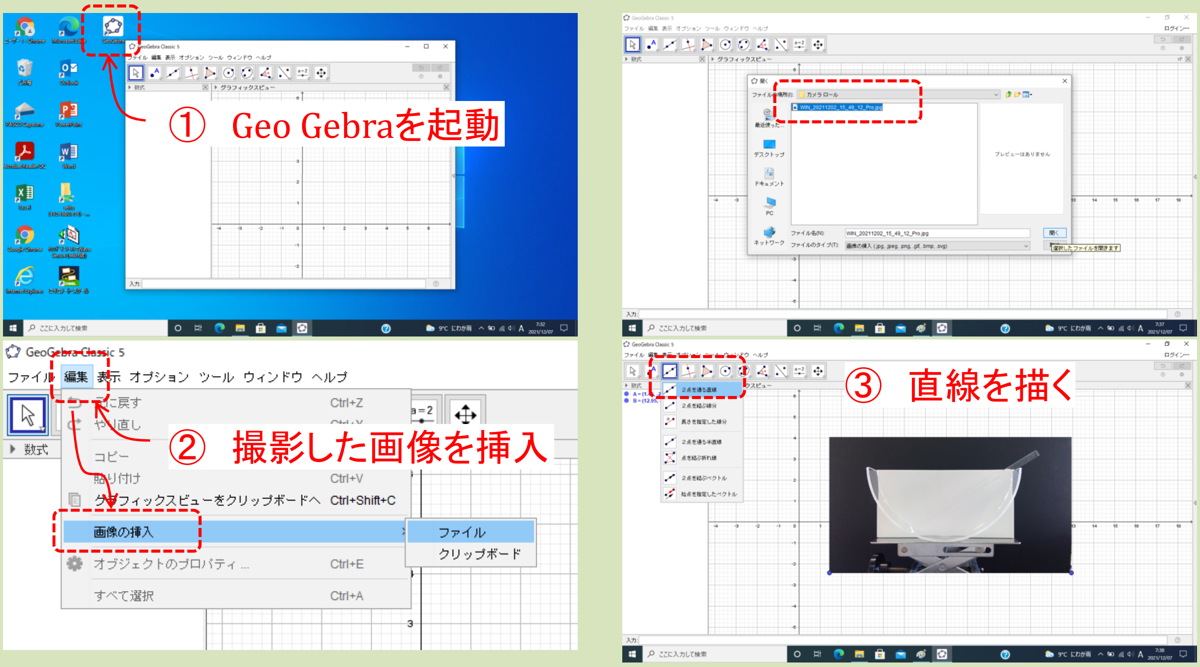


実際に測定してみよう.

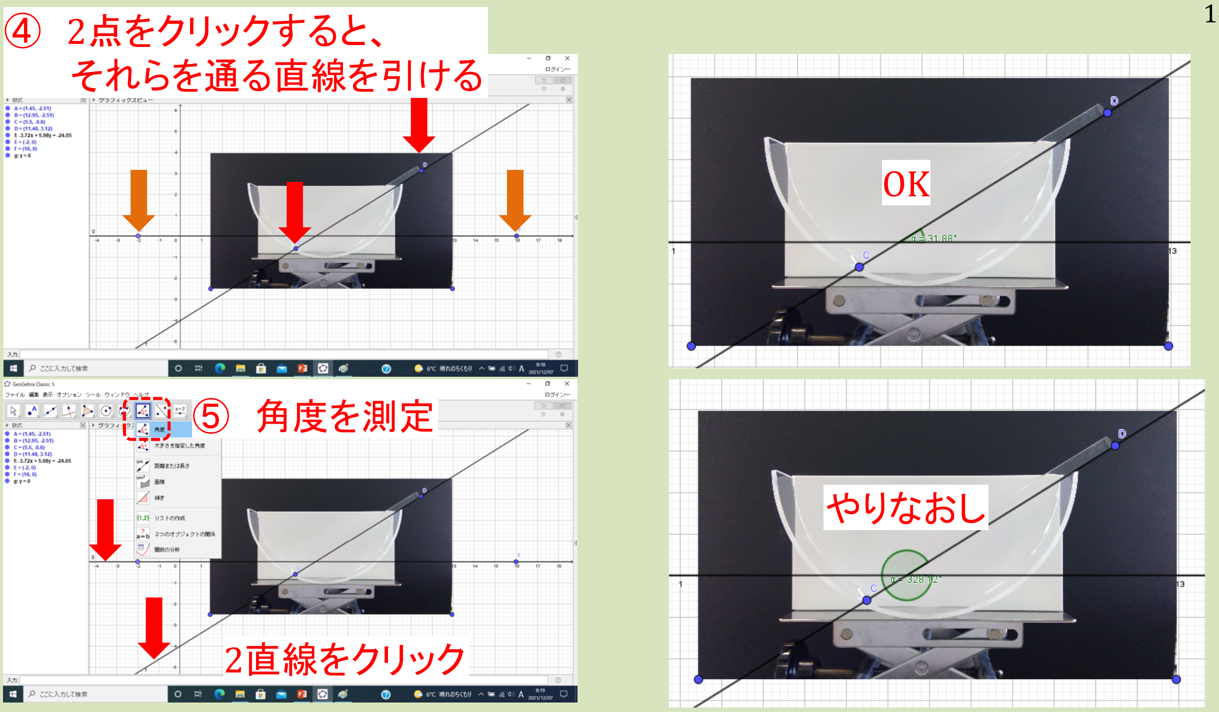
1. ノートPC（Surface）を用いて写真を撮る.
2. 数学アプリを用いて棒の傾き角を測定する.

13

角度測定の手順



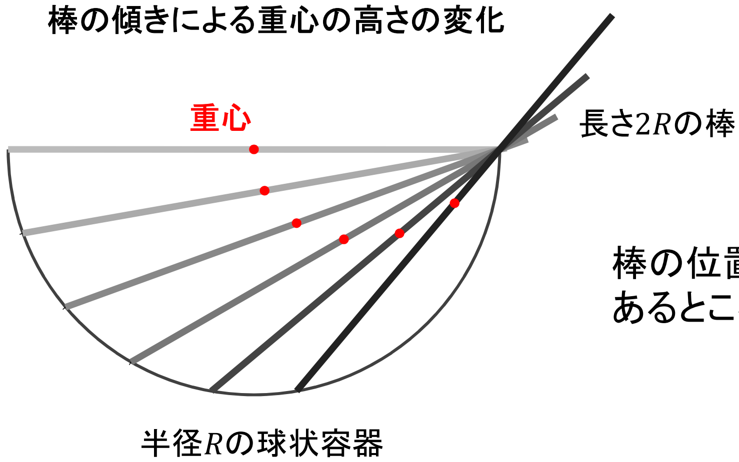
14



15

棒の位置エネルギーは棒の傾きによってどのように変化するか？

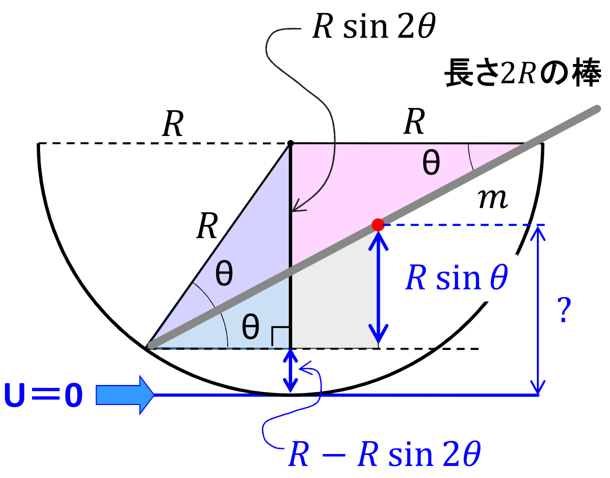
棒の傾きによる重心の高さの変化



棒の位置エネルギーは、棒の傾きがあるところで最小値をとる.

棒の位置エネルギーが最小値をとる角度で棒はつりあう.

最小作用の原理を用いて、つりあい問題を解くことができる.



棒の位置エネルギー

$$U = mg(R - R\sin 2\theta + R\sin\theta)$$

↓ **θで微分する.**

$$\frac{dU}{d\theta} = mgR(-2\cos 2\theta + \cos\theta) = 0$$

とする.

これを解くと、 $4\cos^2\theta - \cos\theta - 2 = 0$

$$\cos\theta = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \qquad \theta = ?$$

スプレッドシートでθの値を計算⇒ Class roomから開く

まとめ

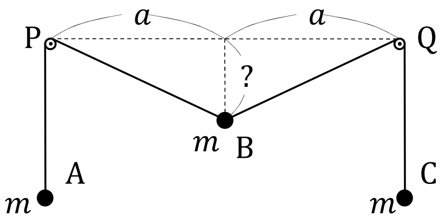
- 微分を使って、ある関数の最小値を求めることができる.
- 様々な自然現象は「最小作用の原理」の視点からで眺めることができる.

現実の問題解決に、数学は重要な役割を果たしている

18

演習問題1

糸の両端と中央に、同じ質量mの小さいおもりA,B,Cを付け、水平線上に固定された滑車P、Qにかけた. 3つのおもりがつりあって静止しているとき、おもりBは水平線PQよりどれだけ下がっているか？
ただし、PQ$= 2a$、重力加速度の大きさをgとする.



19

演習問題2

固い針金の枠を直角三角形にして鉛直に固定する. ひもでつないだ2個のおもり$(m, 3m)$がこの枠に沿って摩擦なしに滑り、静的につりあっている. ひもと1番目の針金がなす角αを求めよ.