

自然科学における数学の活用

— 最小作用の原理 —

目標

- 課題解決のための数学活用力を身につける
- 「最小作用の原理」の視点で自然現象を眺められるようになる

最小作用の原理

“自然界の様々な現象では、ある量が最小値をとる状態が実現する”

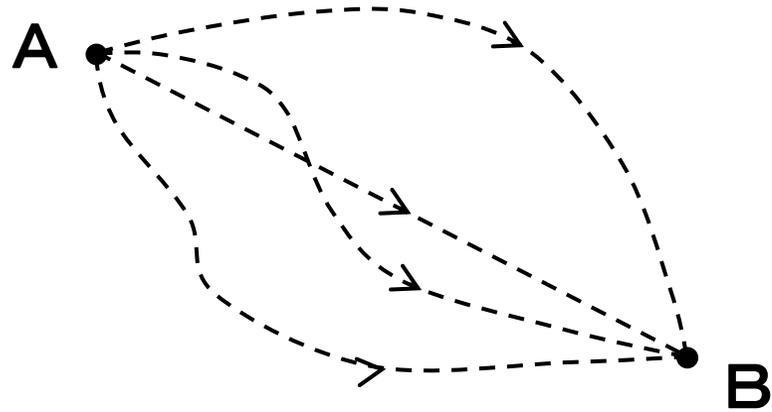
ある量(の積分)が最小値(停留値)をとるという形に表された原理は、
“最小作用の原理”と呼ばれる。

自然界の法則の中には、最小作用の原理の形で表現されるものがしばしば存在する。

光についての最小作用の原理

フェルマーの原理(最小時間の原理)

光はある点から別の点へ **最小時間** で到達できる経路を進む



光は点Aから点Bに進むとき、
所要時間が最も短い経路を進む

光は空気中(一様な物質の中)では直進する



空気から別の物質に進むときに、境界面で進路を変える → 反射・屈折

光の屈折

物質中の光速 v は、空気中の光速 c に比べて 小さい

物質中の光速 $v = \frac{1}{n} c$ (物質中の光速)

空気中の光速

物質中の光速は、空気中の光速の $\frac{1}{n}$ 倍に遅くなる

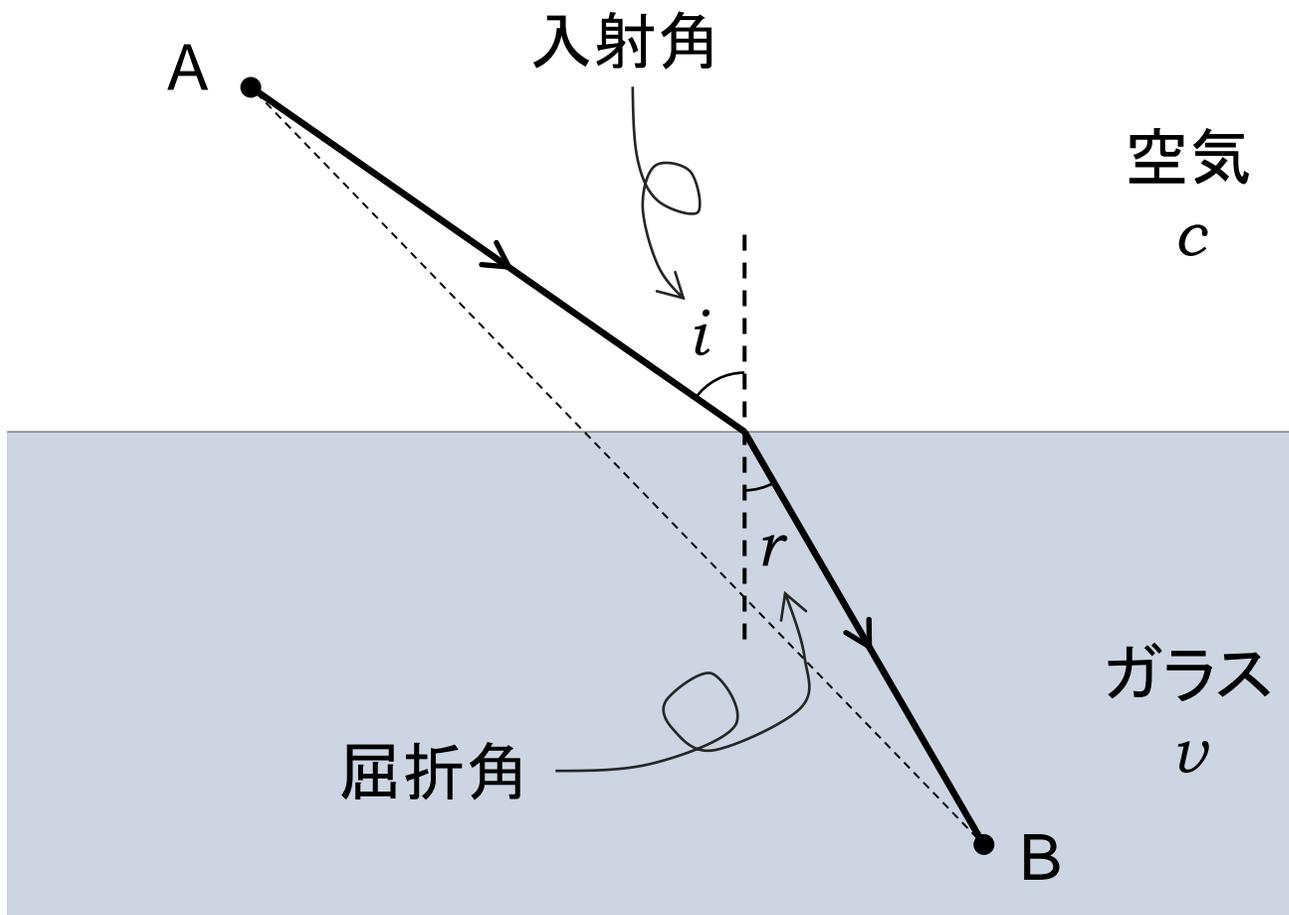
屈折率 : 物質中と空気中における光速の比

いろいろな物質の屈折率

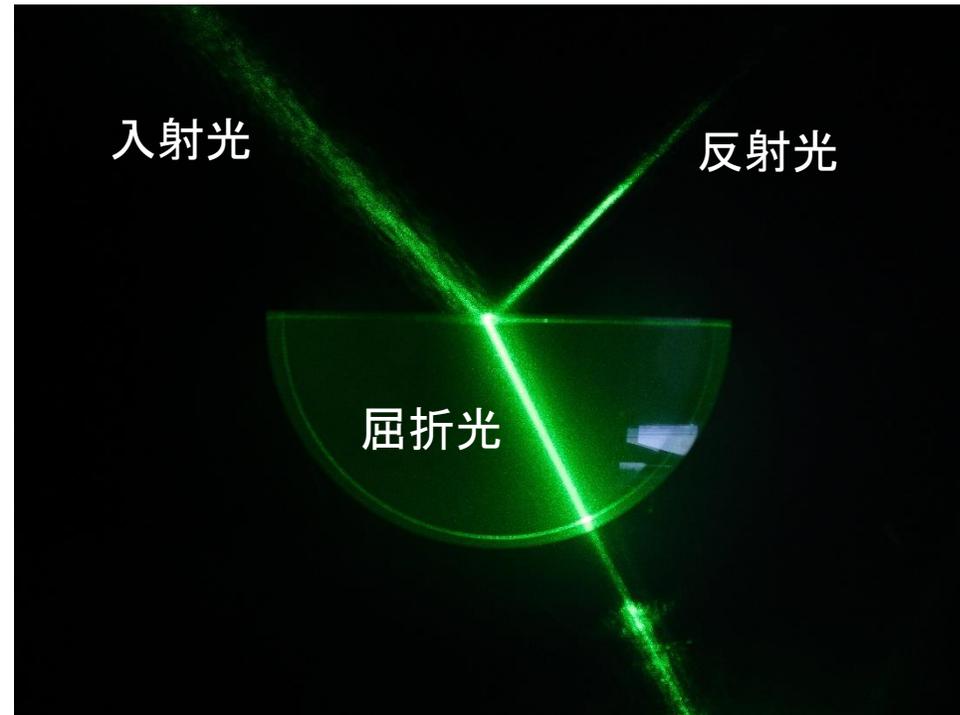
物質	屈折率
空気	1
水	1.33
ガラス	1.45～1.54
ダイヤモンド	2.42

(1) 点Aから点Bに最短時間で進む光線の経路とは？

ガラス中の光速は、空気中の光速の $1/n$ 倍になる($n \cong 1.5$)



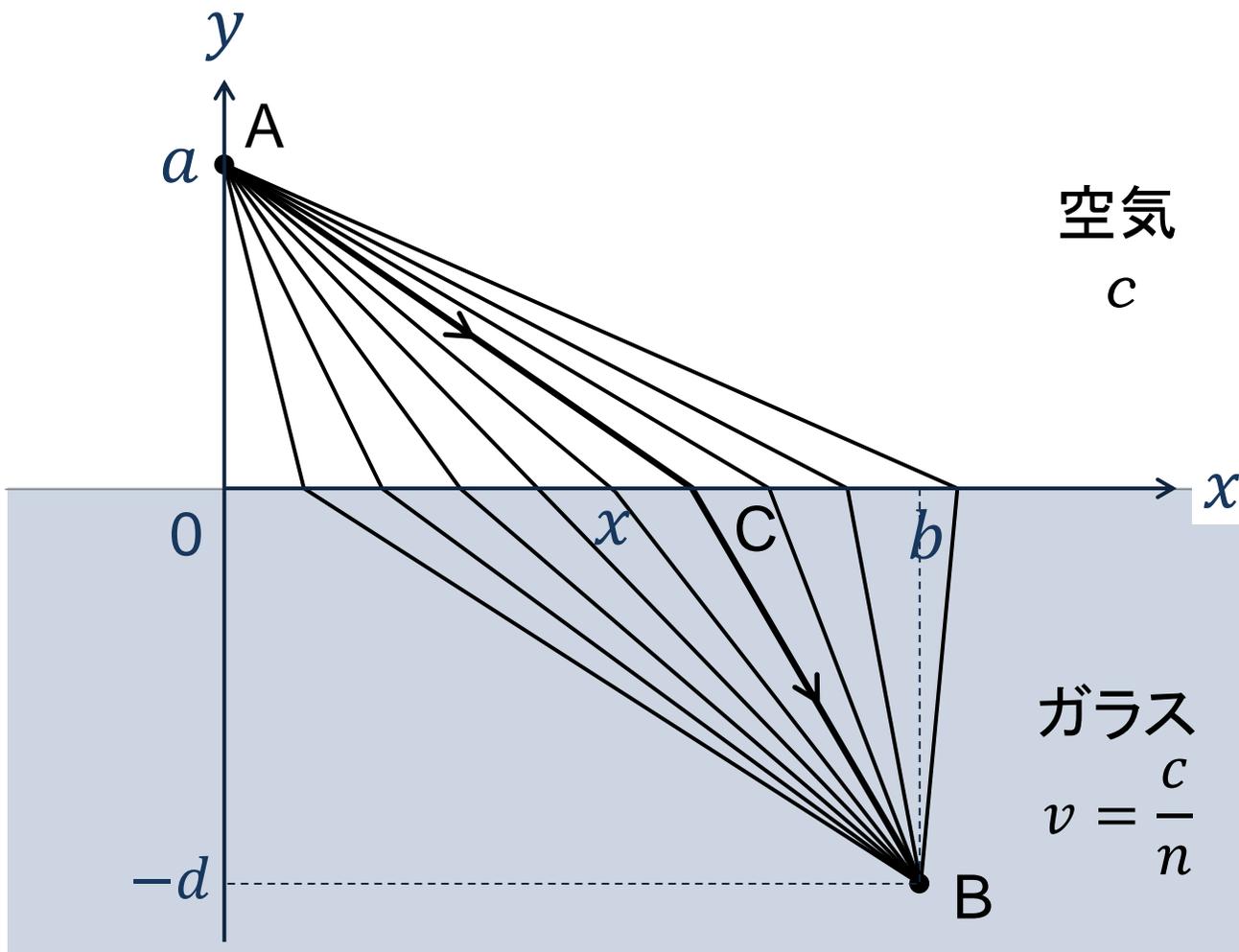
光はAからBに進むとき、所要時間がもっとも短くなる経路を選ぶ



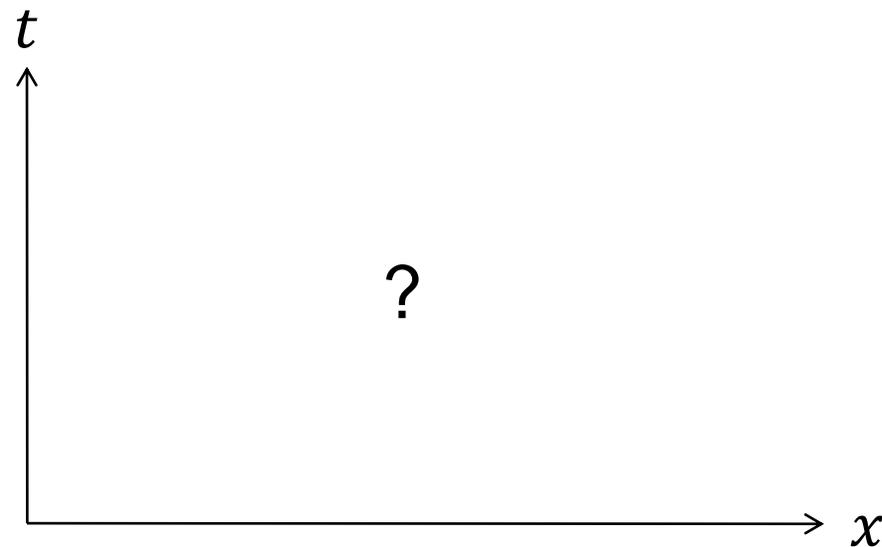
入射角 i と屈折角 r にはどのような関係があるか？

(2) “最小時間の原理” から、入射角 i と屈折角 r の関係 — 屈折の法則 — を導く。

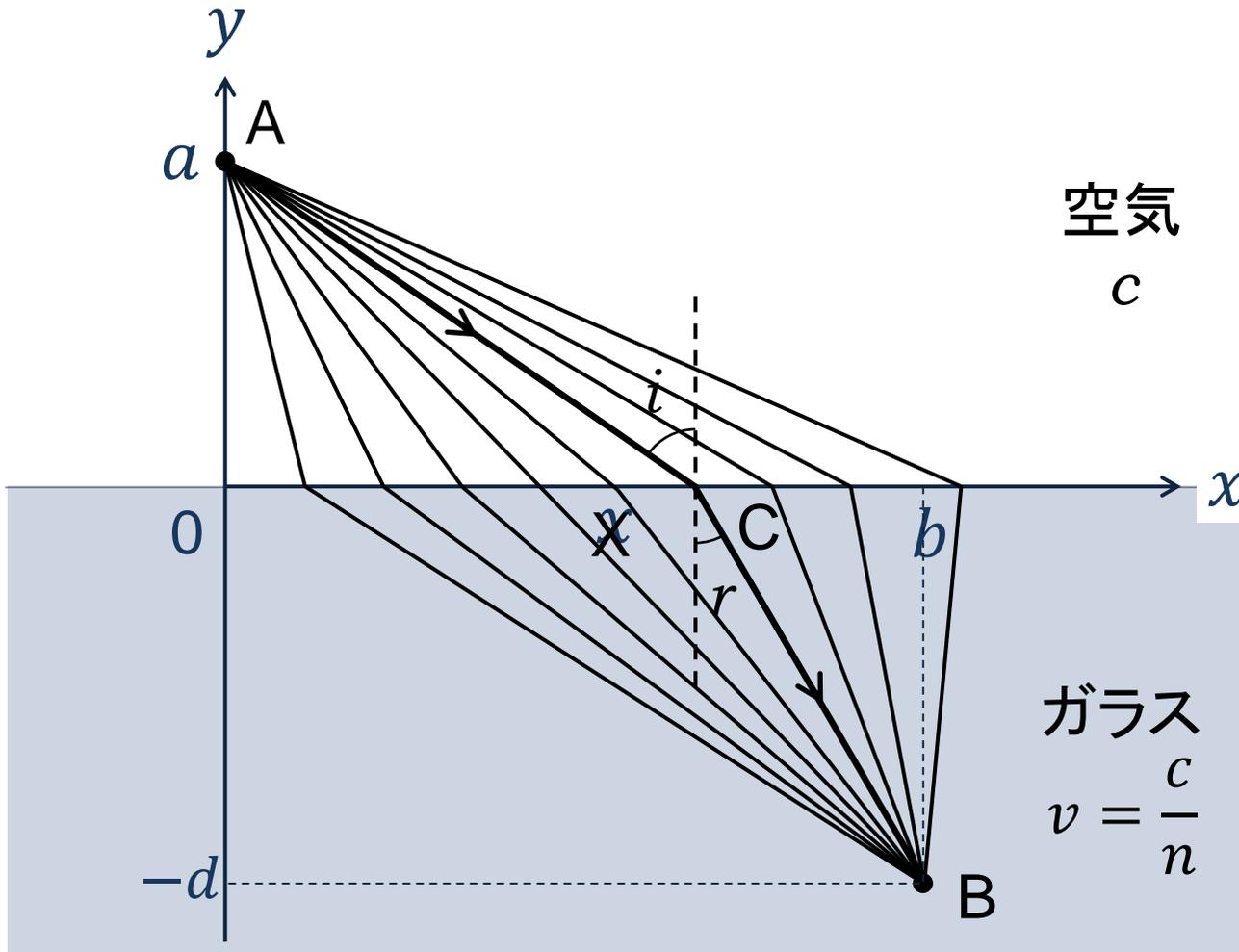
(a) 光が点Aから点Bに進むときの所要時間 t は位置 x のどんな関数になるか？



所要時間
 $t = ?$

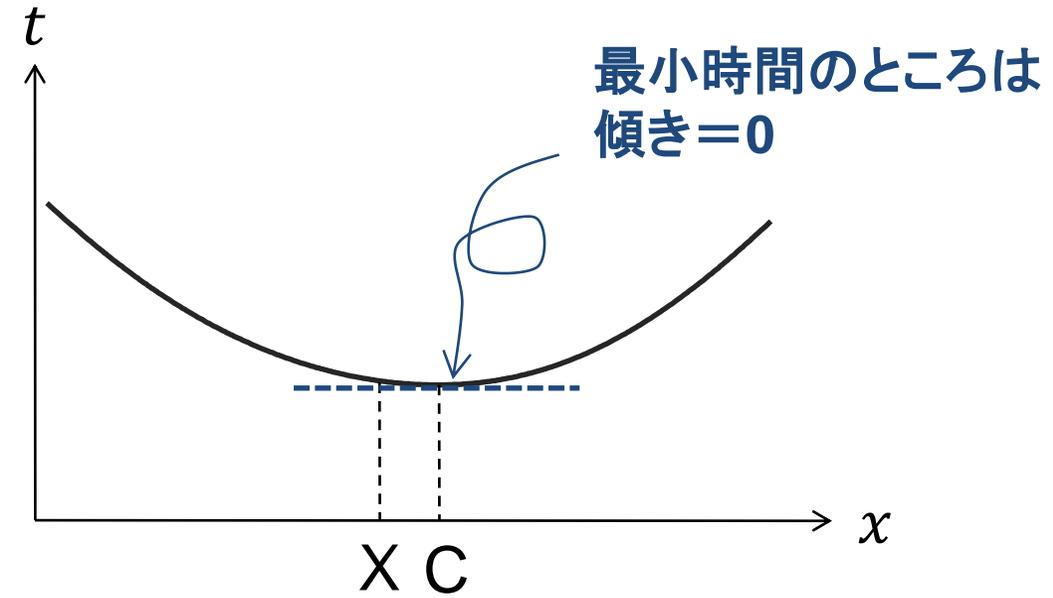


(2) “最小時間の原理” から、入射角 i と屈折角 r の関係 — 屈折の法則 — を導く.



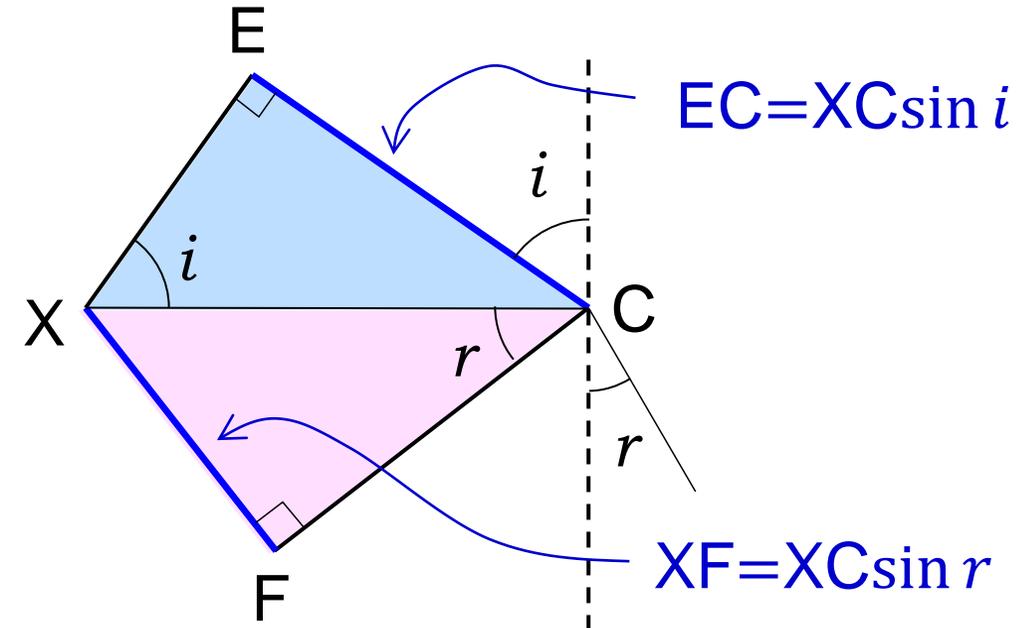
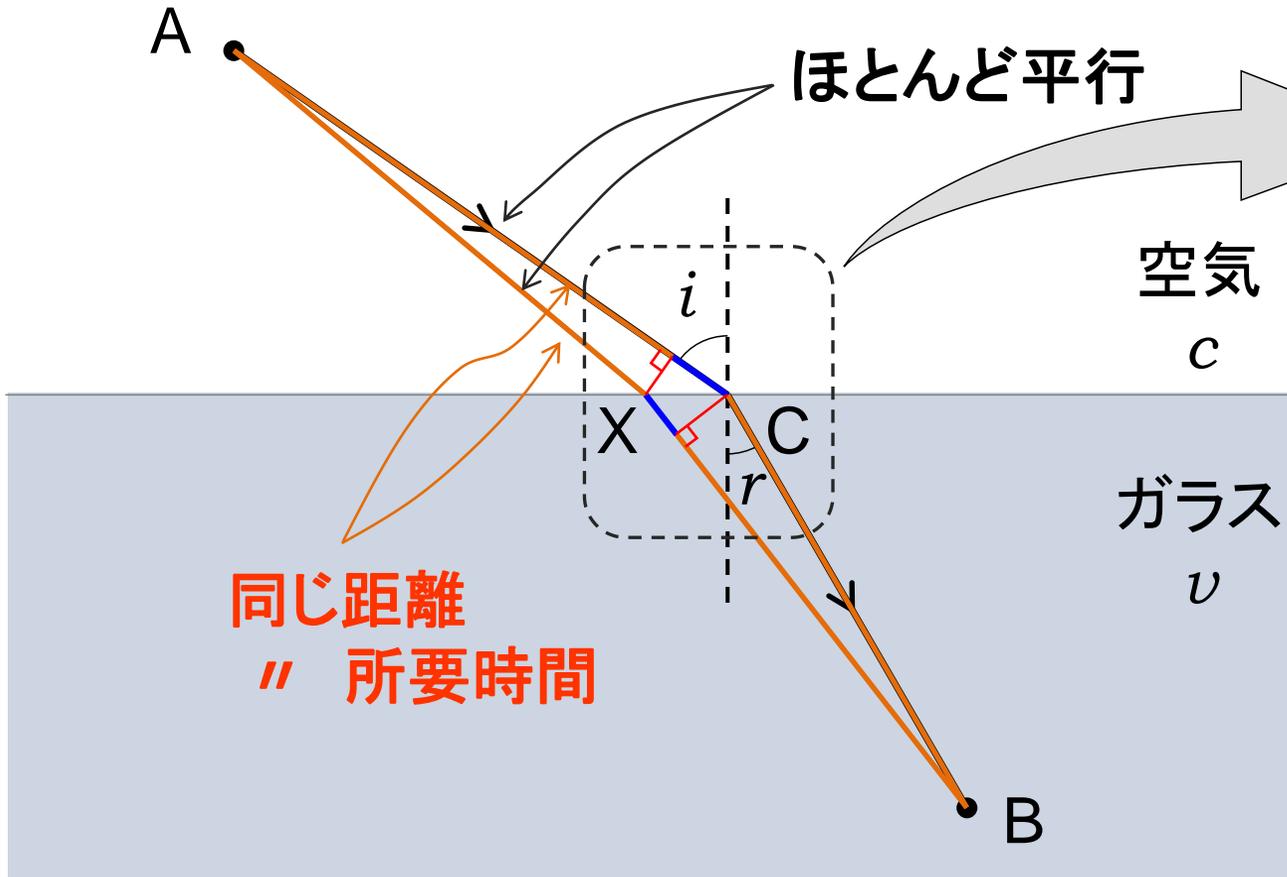
所要時間

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + n\sqrt{(b-x)^2 + d^2}}{c}$$



XがCに十分近い場合は、時間はほとんど同じである

(b) 最短時間の経路からわずかにずれても、実質的に時間の変化がないことを利用して、屈折の法則を導け。



ECとXFを光が進むのにかかる時間は同じ

$$\frac{EC}{c} = \frac{XF}{\frac{c}{n}} \longrightarrow XC \sin i = nXC \sin r$$

光は i と r の正弦の比が、2つの物質中の光速の比に等しくなる方向に進む

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \quad (\text{屈折の法則})$$

実験 屈折の法則の検証

実験をして、屈折の法則を確かめよう。

- **実験内容**

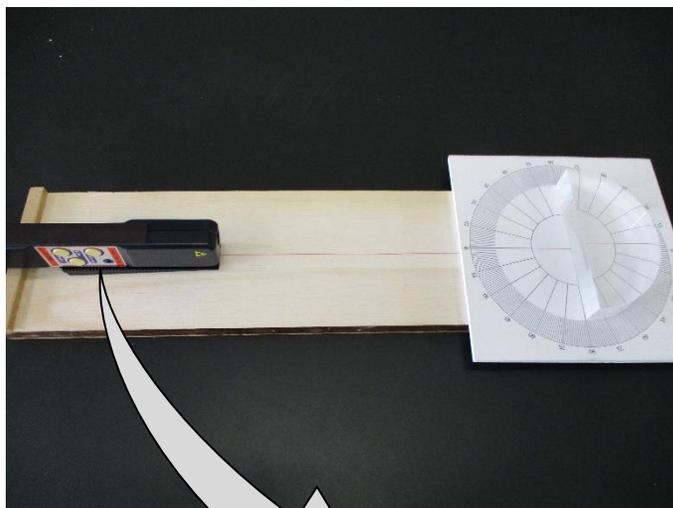
半球レンズにレーザー光を入射して、屈折角を測定する。



1. 屈折の法則が成り立っていることを検証する。
2. 実験結果からアクリルの屈折率 n を求める。

実験手順①

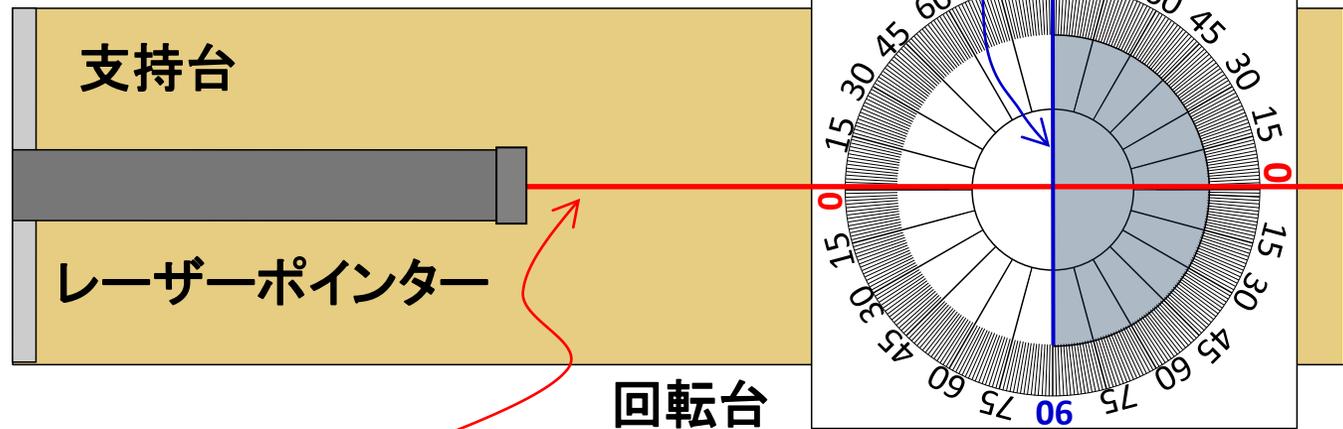
1. 回転台に半球レンズをのせて、回転台と支持台の赤線を合わせる(入射角を0にする)。半球レンズは、その平面部が 90° のラインと一致するように置く。
2. レーザーポインターの「Line」ボタンを押して、半球レンズの中心にレーザー光をあてる。レーザー光の経路が赤線上にはっきり映るように、ポインターを置く位置を調整する。



「Line」ボタンを
押す



半球レンズの平面が 90° を通るように
半球レンズを置く



レーザー光が0を通るように
ポインターの位置を調整する

半球レンズ

実験手順②

3. 回転台を回転させて、入射角 i が $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ の場合について、屈折角 r を測定する。
4. 測定結果を用いて、 $\sin i - \sin r$ グラフを描く。

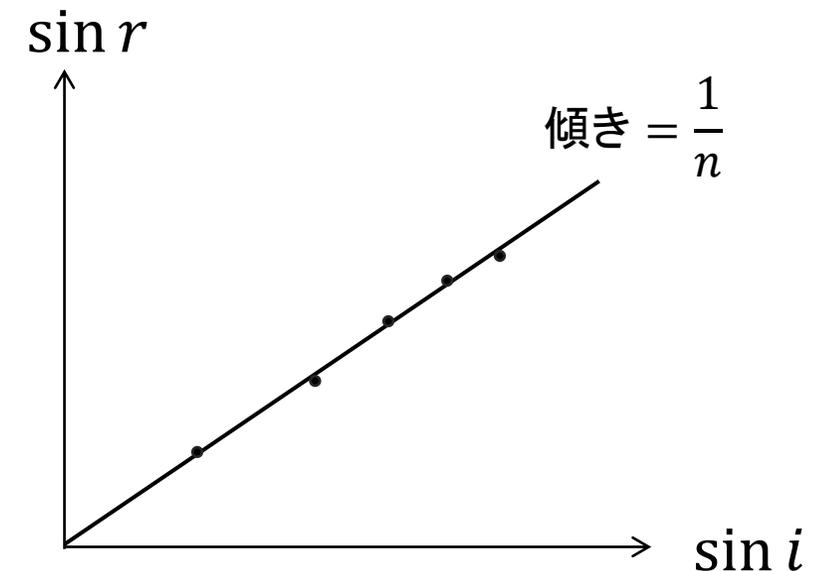
Excelを用いてグラフを描く

PCのパスワード: komatsu

ファイル: 屈折の法則

入射角 i	屈折角 r	$\sin i$	$\sin r$	

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \longrightarrow \sin r = \frac{1}{n} \sin i$$



5. グラフの傾きからアクリルの屈折率 n を求める。

実験手順

1. 回転台に半球レンズをのせて、回転台と支持台の赤線を合わせる(入射角を0にする). 半球レンズは、その平面部が 90° のラインと一致するように置く.
2. レーザーポインターの「Line」ボタンを押して、半球レンズの中心にレーザー光をあてる.
3. 回転台を回転させて、入射角 i が $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ のそれぞれの場合について、屈折角 r を測定する.
4. 測定結果を用いて、 $\sin i - \sin r$ グラフを描く.
5. グラフの傾きからアクリルの屈折率 n を求める.

