

微分方程式による数学モデル — 抵抗力がはたらく落下運動 —

■ 内容および目的

空気抵抗力を受けて落下する物体の運動方程式をつくる。微分方程式を表された運動方程式の解を求めて、計算結果と実験結果を比較する。数学を応用—微分方程式で数学モデルをつくる—ことによって、観測結果を説明したり、予測したりする手法を身につける。

■ 実験

空気中を落下する発泡スチロール球をデジタルカメラで撮影する。実験で使用するデジタルカメラは、1秒間で30フレーム（つまり、1/30秒ごとの画像）を記録する。コンピュータの動画処理ソフト、画像処理ソフトを用いて分析することによって、得られた動画データから発泡スチロール球の速度の時間変化を調べる。また、理科棟吹き抜けの3階から発泡スチロール球を落下させて、その終端速度を測定する。

✓準備

- ・コンピュータ
- ・ガイドトラック（メジャー）
- ・発泡スチロール球（直径10mm）
- ・ストップウォッチ
- ・ハンドクランプ
- ・デジタルカメラ
- ・ラボジャッキ

✓実験手順

デジタルカメラを用いて、落下する発泡スチロール球の位置の時間変化を記録する。

1-1. 発泡スチロール球の落下運動の動画撮影

- (1) 実験室のサイドの腰板があるところでラボジャッキを床に置き、その上にガイドトラックを鉛直に乗せる。ガイドトラックの裏側をハンドクランプではさんで腰板に乗せて安定させる。
- (2) デジタルカメラを縦長にして、実験机の上に置く。ディスプレイにガイドトラック全体がちょうど収まるようにラボジャッキの高さを調整する。デジタルカメラのズーム機能を使って拡大しないように。
- (3) 発泡スチロール球をガイドトラックの上の白いラインに合わせて手でおく。動画ボタンを押してから、発泡スチロール球を静かに離す。着地したら撮影を終える。視差を少なくするために、なるべくガイドトラックの黒い紙に近いところを落下させる。
- (4) 発泡スチロール球がまっすぐ落下せずにガイドトラックの黒い紙の部分から外れてしまったら、再度撮影を行う。うまく落下しないときは、別の発泡スチロール球で試しなさい。

1-2. 動画データから画像データへの変換

- (1) デジタルカメラの電源を切って本体からSDカードを取り出し、コンピュータのカードスロットに挿入する。
- (2) コンピュータのデスクトップから動画→画像変換ソフト「Free Video to JPG Converter」を起動して、動画データを画像データに変化する。
 - ・「ファイルを追加」 → 「開く」画面左側でデータの場所を「SDHC(E:)」 → → 撮影したデータを選択する → 「開く」をクリックする。
 - ・「フレームごと」にチェックを入れる → 「…」ボタンをクリックして出力先をデスクトップに変更する。
 - ・「変換」ボタンをクリックすると、デスクトップ上に、画像データフォルダが作成される。
 - ・デスクトップ上に作成された画像データフォルダを開き、手を離れた瞬間($t = 0$)の画像データがどれか（ファイル名）を確認する。
 - ・画像分析するデータについては、画像の左右を反転させる。

水流についてのトリチェリの法則

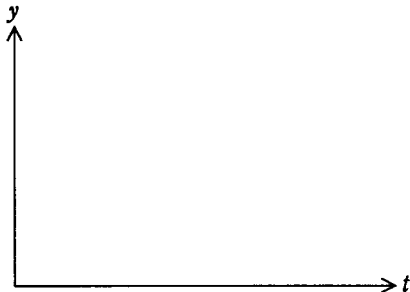
■ 目的

数学を応用することによって、観測結果—私たちの世界で起こっていること—を説明したり、予測したりする手法—微分方程式によるモデルリング—を身につける。

■ 課題

円筒状の容器に水が入っている。容器の底近くに孔を空けて水を流出させるとき、水面の高さはどのような時間変化をするか？

水が流出し始めてからの時間 t と水面の高さ y の関係を予想して、そのグラフの概形を描きなさい。



このように予想した理由は？

■ 実験

底に近い部分に小さな孔を空けた円筒状の容器に水を入れる。孔からの水の流出によって低下する水位の時間変化を測定する。

✓ 準備

- ・ コンピュータ (Capstone)
- ・ データロガー (spark)
- ・ 距離センサ
- ・ メスシリンダー (直径 80mm、側面に空けた孔の直径は 4mm)
- ・ シリコン栓
- ・ ラボジャッキ
- ・ 水槽

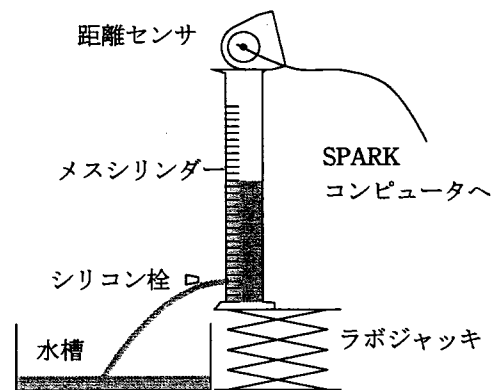
✓ 実験手順

＜実験装置のセッティング＞

- (1) 図のように、水槽の近くにラボジャッキを設置し、その上にメスシリンダーをのせる。側面に空けられている孔から流出した水が水槽に溜まるようにメスシリンダーの向きを調整する。
- (2) メスシリンダーに空けた孔の高さまで水を入れる。
- (3) 距離センサを、パルス超音波の照射面を下に向けてメスシリンダーの真上に設置する。
- (4) 距離センサ、データロガー、コンピュータを接続して、水位計測用の Capstone ファイル「water.cap」を開く。

＜水位の時間変化の測定＞

- (5) 「water.cap」の画面左側にある「ハードウェアセットアップ」をクリックする。さらに、「今センサの値を 0 にする」をクリックしてこのときの水位を $y = 0$ に設定する。
- (6) シリコン栓でメスシリンダー側面の穴をふさいでから、距離センサを濡らさないように 1400mL のラインまでに水を注ぐ。
- (7) 画面上の「Record」ボタンをシリコン栓を外すと同時にクリックして測定を開始する。(ボタンをクリックすると、自動的に測定が停止するように設定されている。)



✓ 実験結果

実験から得られた時間 t と水面の高さ y の関係を言葉で簡潔に説明しなさい。

1-3. 発泡スチロール球の位置の記録

- デスクトップ上のフォルダ「ImageJJ」をクリック → 画像処理ソフト「ijj」を起動する。
- 「ファイル」 → 「ファイルを開く」 → デスクトップに作成されている画像データを選択して、先に確認した $t = 0$ の画像を開く。画像を最大化する。
- ガイドラック上の白線および下の白線にカーソルを合わせて、それぞれ x 座標（ピクセル数）を記録し、その差を計算する。

下の白線の x 座標 - 上の白線の x 座標 = 差

	-		=	
--	---	--	---	--

- 「画像解析」 → 「実サイズを測定***」 → 「Set Scale」に次の値を入力する。

Distance in pixels:	(3)で求めた x 座標の差
Known Distance:	100
Pixel aspect ratio:	1.0
Unit of length:	cm
<input checked="" type="checkbox"/> global ←チェックを入れる	

- 画像に写っている発泡スチロール球の中心にカーソルを合わせて、その位置を記録する。
- 「ファイル」 → 「次の画面を開く」 → 次の画像を開き、発泡スチロール球の中心にカーソルを合わせて、その位置を記録する。発泡スチロール球の位置が 100cm を超えるまでこの作業を繰り返す。
- 得られた位置の値を、Excel のワークシートに入力し、速度の時間変化をグラフで表す。 「seito (srv03)」 → 「SSH」 → 「科学探究」 → 「空気抵抗」
→ Excel ファイル「空気抵抗_*班.xlsx」

2. 発泡スチロール球の終端速度の測定

理科棟の吹き抜けの3階から発泡スチロール球を落下させて終端速度の測定を行う。

- 3階から発泡スチロール球を落下させる。ストップウォッチを用いて、発泡スチロール球が2階の廊下の手すりの高さから1階の床まで落下するのに要する時間 t を測定する。
- 2階の廊下の手すりの高さから1階の床までの高低差 h は 5.4m である。終端速度 v_f を高低差 h を時間 t で割ることによって求めよ。

✓実験結果

1. 発泡スチロール球の位置の時間変化

t (s)	y (cm)	t (s)	y (cm)
0		8/30	
1/30		9/30	
2/30		10/30	
3/30		11/30	
4/30		12/30	
5/30		13/30	
6/30		14/30	
7/30		15/30	

2. 発泡スチロール球の終端速度

落下に要した時間 $t =$ s

終端速度 $v_f =$ m/s