定期考査に出題した探究力問題例

数学

4 以下の文章を読みながら問に答えなさい。

花子：太郎さん、何の問題を解いてるの？

太郎：数列の和Σの問題だよ。

> (1) 次の数列の和を求めよ。 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$

　　これはどうやって計算したらいいんだろう？

花子：これは授業で塩屋先生が解説してたよ。

　　第k項の分母を因数分解できるから，部分分数分解して…

太郎：わかった！次々消えていくパターンだ。

花子：じゃあ、これは？

> (2) 次の数列の和を求めよ。 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1}$

太郎：これも難しいね。でもこれも授業でやったよね。

　　第k項が(等差)×(等比)の型をしているから…できそうだよ！

【問１】太郎さんと花子さんの会話を元に(1)(2)の数列の和を求めなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1}$

太郎：(1) は次々消えていくところがエレガントだね。塩屋先生が言う「美しい」ってやつだね。(2) も(1) みたいに次々消えていく解き方ができないかな？

花子：部分分数分解みたいに第k項を差の形で表せばいいのかな？

　　とりあえず，$(k+1)\cdot 2^k-k\cdot 2^{k-1}$を計算してみましょう。

$$(k+1)\cdot 2^k-k\cdot 2^{k-1}=\boxed{\text{ア}}$$

　　となるので，

$$k\cdot 2^{k-1}=(k+1)\cdot 2^k-k\cdot 2^{k-1}-\boxed{\text{イ}}\quad\cdots①$$

　　これで<u>②「次々消えていく」方法が使えそうね。</u>

【問２】(3) 太郎さんと花子さんの会話の(ア)(イ)に当てはまる最も適切な数式を答えなさい。

【2点×2=4点】

ア	$k\cdot 2^{k-1}+2^k$
イ	2^k

(4) ①を用いて下線② の方法で$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1}$を求めなさい。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1}$の求め方

地震の規模を表す数値のマグニチュードを M とし，地震そのもののエネルギーを E としたとき，等式 $\log_{10}E=4.8+1.5M$ が成り立つ。次の問いに答えよ。

(1)　マグニチュードが１増加すると，地震のエネルギーは何倍となるか。（答えのみでよい。）ただし，**<u>実数で答えよ。</u>**

(2)　(1)を証明せよ。

以下の問題を$\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$，$\log_{10}7 = 0.8451$として答えよ。

(1)　7^{70}は何桁か。

(2)　7^{70}の最高位の数字は何か。

(3)　7^{70}の最高位の次の位（例えば13579であれば3に相当する位）の数字は何か。

6 2から9までの自然数 n について，n 進法を用いた暗号を考える。以下の表のように，10進法で表された数字とアルファベットを対応させる。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
k	l	m	n	o	p	q	r	s	t
21	22	23	24	25	26				
u	v	w	x	y	z				

例えば「max」という文字列を2進法で暗号化することを考える。「max」という文字列を10進法で対応させると13, 1, 24となる。これを2進法で表示すると，$13=1101_{(2)}$，$1=1_{(2)}$，$24=11000_{(2)}$である。
2進法は$11111_{(2)}=31$であることから，全てのアルファベットは5桁以下で表すことができ，4桁だけでは表せない文字がある。このとき，5桁を2進法の<u>区切り桁数</u>と呼ぶことにする。
13, 1, 24を2進法の区切り桁数で統一すると01101, 00001, 11000となる。これらをこの順に並べた数字の列「011010000111000」が「max」を2進法で暗号化した数字となる。
逆にいうと，2進法の最大桁数で区切ることで，文字数とそれらに対応する文字を解読することができる。

n 進法における暗号化とその解読についても同様に考える。
右側の問い(1)～(3)に答えよ。

【計算余白】

(1)　3進法の区切り桁数を求めよ。また6進法における区切り桁数を求めよ。(2点)

解答　$222_{(3)}=2\cdot3^2+2\cdot3+2=26$，$100_{(3)}=3^2=9$
より，3進法の区切り桁数は3桁

また　$55_{(6)}=6\cdot5+5=35$，$10_{(6)}=6$
より，6進法の区切り桁数は2桁

(2)　「fan」という文字列を3進法で暗号化した数字の列を求めよ。(3点)

解答　10進法で対応する数字は　6, 1, 14
$6=20_{(3)}$，$1=1_{(3)}$，$14=112_{(3)}$　であり，
3進法の区切り桁数は3桁なので，
求める数字の列は　020001112

(3)　暗号化された言葉「0130111715」について，何進法で暗号化されているか求め，何の文字列かを解読せよ。(3点)

解答　7という数字が含まれているので，8進法または9進法である。
どちらの場合も，区切り桁数は2桁。
よって01, 30, 11, 17, 15がそれぞれ1文字を表しているが，

$$30_{(9)}=3\cdot9^1=27$$

なので，9進法で暗号化されているとすると，対応するアルファベットが存在しない。よって8進法で暗号化されている。
$1_{(8)}=1$，$30_{(8)}=24$，$11_{(8)}=9$，$17_{(8)}=15$，$15_{(8)}=13$なので
対応する文字列は　axiom

物 理

9 （探究力）10点

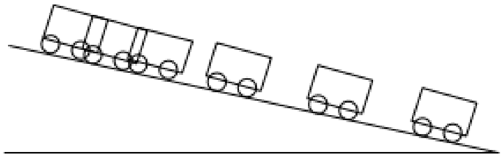
図のように、斜面を運動する台車に関する実験を行い、台車の加速度の大きさを求めたい。初速度0で運動を開始した瞬間を時刻 $t=0$ s とし、ストロボ写真を用いて位置座標の測定を行い、表のような結果を得た。

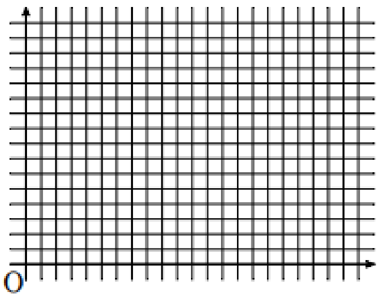
（1）縦軸に位置座標 x、横軸に時刻 t をとったグラフに、測定結果をもとに点を打ち、 $x-t$ グラフを描け。

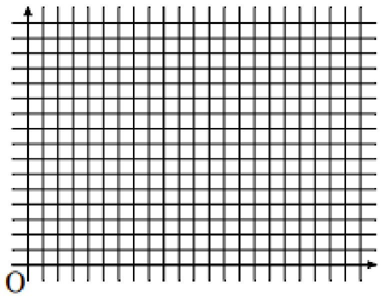
（2）縦軸に位置座標 x、横軸に時刻の二乗 t^2 をとったグラフに、測定結果をもとに点を打ち、 $x-t^2$ グラフを描け。

（3）この台車の加速度の大きさを、単位も含めて有効数字2桁で推定せよ。ただし、どのように推定したのかその過程も示せ

時刻 t/s	位置座標 x/mm
0	0
0.05	6
0.10	25
0.15	55
0.20	98
0.25	153
0.30	221







9 （探究力）10点

質量 95 g のある金属製の熱量計に水 50 g を入れてしばらく放置したあと温度を測定すると 20 ℃ であった。そこへ 80 ℃ の高温の水 30 g を加えたところ、熱平衡状態となり全体の水温が 40 ℃ となった。水の比熱を 4.2 J/(g・K) とし、外部との熱の出入りはないものとする。

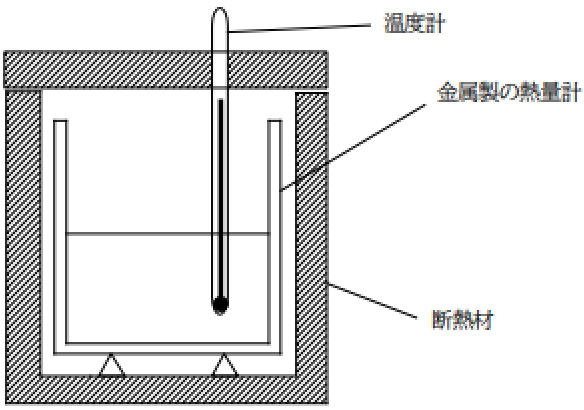
（1）高温の水が失った熱量を、単位も含めて有効数字2桁で答えよ。

（2）この実験の結果と金属の比熱の表を参考にして、熱量計を構成する金属を推定せよ。

（3）全体の温度を 40 ℃から 50 ℃ に上昇させたい場合、 80 ℃ の高温の水をさらにどれだけ加えればよいか。単位も含めて有効数字2桁で答えよ。

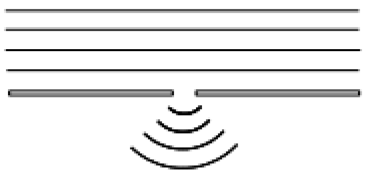
表

金属名	比熱 $/J\ g^{-1}\ K^{-1}$
銅	0.38
鉄	0.44
アルミニウム	0.90



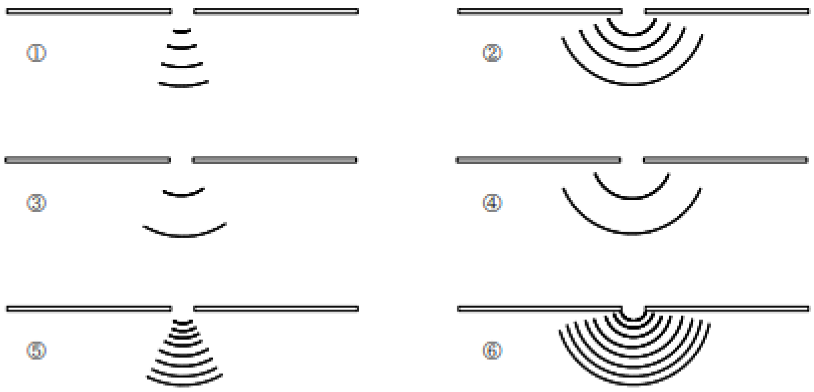
9 （探究力）10点

水の入った水槽に、すき間のある薄いつい立てを上部が水面から出るように置く。つい立てに平行な直線的な波面を送ると、波がすき間を通り抜け、つい立ての背後に回り込む様子が観測された。図は、回り込んだ波のある時刻での波面の様子を模式的に表したものである。ただし、図は真上見た様子である。

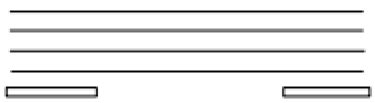


（1）この波の代わりに、つい立てに平行な波面をもつ振動数が２倍の水面波を送った。このとき観測される波面を模式的に表したものとして最も適当な図を、①~⑥のうちから１つ選べ。

（2）この波の代わりに、つい立てに平行な波面をもつ振動数が半分の水面波を送った。このとき観測される波面を模式的に表したものとして最も適当な図を、①~⑥のうちから１つ選べ。

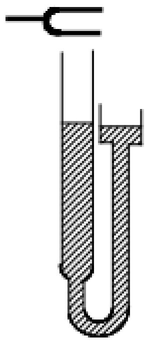


（3）もとの波を使って、つい立てのすき間を８倍に広げて実験を行った。このとき観測される波面の概形を解答欄に描け。



1 （探究力）10点

図のような、水面の位置が自由に変えられる、内径が一定のガラス管とおんさを使って、気柱の共鳴実験を行った。管口の近くで振動数408 Hzのおんさを鳴らしながら水面を下げていくと、表のように２か所で共鳴が起きた。共鳴が起こっているとき、ガラス管内の空気中には音波の定常波ができている。



	第1共鳴点の位置 L_1/cm	第2共鳴点の位置 L_2/cm
1回目	19.8	61.5
2回目	19.7	61.8
3回目	19.9	61.5
平均		

（1）おんさの発する音波の波長を、単位も含めて有効数字３桁で答えよ。
（2）開口端補正（管口と管口付近の定常波の腹の間の距離）を、単位も含めて有効数字２桁で答えよ。
（3）この実験を行ったときの、実験室の室温を、単位も含めて有効数字３桁で答えよ。
（4）第２共鳴点の位置に水面の位置を保ったまま、おんさの代わりに管口にスピーカーを近づけて振動数を変化させながら同様の実験を行った。 408 Hz 以外に共鳴を起こす振動数を、小さい方から２つ答えよ。

地 学

Ⅱ　遠心力について
《物体の質量をm、回転半径をr、物体の速度をVとする。また地球は完全な球体（半径R）であるとする》
（2）物体が円運動をしているとき、この物体にはたらく遠心力の大きさを求めよ。
（3）（2）で円運動の周期（1周するのにかかる時間）をTとするとき、物体の速度Vを求めよ。
（4）遠心力の大きさfをm、r、Tを使って表せ。
（5）（2）,（4）の式を用いて地球上の物体にはたらく遠心力の大きさの緯度による変化を考察せよ。
Ⅲ　重力について
（8）振り子の周期は$2\pi\sqrt{\dfrac{L(\text{振子の長さ})}{g(\text{重力加速度})}}$で与えられる。高緯度では振子の周期はどうなるか。また、その理由を答えよ。
ただし、重力加速度gは重力の大きさに比例するものとする。